



**UNIVERSIDAD JOSÉ CARLOS MARIÁTEGUI**

**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN**

**ESCUELA DE POSGRADO**

**MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN**

**TESIS**

**OBTENCIÓN DE FUNCIONES MULTIVARIABLES PARA EL  
ESTUDIO GENERALIZADO DE LA ESTABILIDAD Y  
ESTABILIDAD ASINTÓTICA DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO  
DE UN SISTEMA AUTÓNOMO NO LINEAL, EN EL  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – UNJBG EN EL AÑO 2013**

**PRESENTADA POR**

**LIC. EDUARDO RODRIGUEZ DELGADO**

**ASESOR**

**MSc. JHONY ALFONSO CHÁVEZ DELGADO**

**PARA OPTAR GRADO ACADÉMICO DE  
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN CON MENCIÓN EN  
MATEMÁTICA  
MOQUEGUA-PERÚ**

**2014**

## ÍNDICE DE CONTENIDO

PÁGINA DE JURADOS .....	<i>i</i>
DEDICATORIA .....	<i>ii</i>
AGRADECIMIENTO .....	<i>iii</i>
ÍNDICE DE CONTENIDO.....	<i>iv</i>
ÍNDICE DE GRÁFICOS .....	<i>viii</i>
ÍNDICE DE TABLAS .....	<i>ix</i>
RESUMEN.....	<i>x</i>
ABSTRACT .....	<i>xi</i>
INTRODUCCIÓN .....	<i>xii</i>
CAPÍTULO I.....	1
EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN .....	1
1.1. Descripción de la realidad problemática .....	1
1.1.1. Antecedentes del problema .....	1
1.1.2. Problemática de la investigación.....	2
1.2. Definición del problema.....	4
1.2.1. Problema general.....	5
1.2.2. Problemas específicos .....	5
1.3. Objetivos de la investigación .....	5
1.3.1. Objetivo general .....	5
1.3.2. Objetivos específicos .....	5

1.4. Justificación y limitaciones de la investigación .....	6
1.5. Variables .....	8
1.5.1. Caracterización de las variables .....	8
1.5.2. Definición operacional de las variables .....	8
1.6. Hipótesis de la investigación.....	9
1.6.1. Hipótesis general.....	9
1.6.2. Hipótesis específicas: .....	9
CAPÍTULO II .....	10
MARCO TEÓRICO.....	10
2.1. Antecedentes de la investigación .....	10
2.2. Bases teóricas .....	31
2.3. Marco conceptual .....	33
CAPÍTULO III.....	35
MÉTODO.....	35
3.1. Tipo de la investigación. ....	35
3.2. Diseño de investigación. ....	35
3.2.1. Método de estudio .....	36
3.2.2. Procedimiento del método axiomático.....	36
3.3. Población y muestra .....	37
3.3.1. Población en las ciencias formales.....	37
3.3.2. Muestra.....	37

3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos.....	37
3.4.1. Técnicas.....	37
3.4.2. Instrumentos.....	38
3.5. Técnicas de procesamiento y análisis de datos .....	39
CAPÍTULO IV.....	40
PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS.....	40
4.1. Presentación de resultados por variables.....	40
4.1.1. Problemática de la asignatura ecuaciones diferenciales aplicadas en la Escuela de Física Aplicada-UNJBG .....	42
4.2. Contrastación de hipótesis .....	42
4.3. Discusión de resultados.....	43
4.3.1. Estabilidad y Estabilidad asintótica .....	43
4.3.2. Funciones multivariantes en sistemas lineales.....	50
4.3.3. Funciones multivariantes para sistemas no lineales.....	56
4.3.4. Aplicación de la función multivariable en un campo de fuerza conservativo .....	59
4.3.5. Aplicación de las funciones multivariantes en el movimiento pendular .....	64
4.3.6. Aplicación de las funciones multivariantes en un circuito eléctrico...	66
4.4. Propuesta didáctica de la asignatura ecuaciones diferenciales aplicadas en el Departamento de Física - UNJBG .....	69

4.4.1. Datos .....	69
4.4.2. Estadísticos.....	70
4.4.3. Descripción y análisis de la normalidad para las diferencias.....	72
4.4.4. Estadística de prueba no paramétrica de Wilcoxon .....	75
CAPÍTULO V .....	77
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	77
5.1. Conclusiones .....	77
5.2. Recomendaciones.....	78
BIBLIOGRAFÍA .....	79
ANEXOS .....	87

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Figura 1. (a) Asintóticamente estable, (b) Asintóticamente estable, (c) Inestable, (d) Estable no asintótica .....	<i>xiii</i>
Figura 2. Punto de equilibrio estable .....	32
Figura 3. Punto de equilibrio asintóticamente estable .....	32
Figura 4. Punto de equilibrio inestable .....	33
Figura 5. Péndulo simple .....	64
Figura 6. Circuito eléctrico .....	67
Figura 7. Histograma antes de la didáctica de la estabilidad .....	71
Figura 8. Histograma después de la didáctica de la estabilidad .....	72
Figura 9. El gráfico de la normalidad de la diferencia .....	74
Figura 10. El gráfico de la normalidad sin tendencia de diferencia .....	74

## ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Población.....	37
Tabla 2. Puntaje del Pretest y Postest a 17 estudiantes del segundo año de la Escuela de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la UNJBG....	70
Tabla 3. Análisis exploratorio de los datos y determinación de las medidas descriptivas antes y después de participar en la didáctica de la estabilidad .....	70
Tabla 4. Frecuencia antes de la didáctica de la estabilidad.....	71
Tabla 5. Frecuencia después de la didáctica de la estabilidad .....	71
Tabla 6. Diferencia (di) .....	72
Tabla 7. Prueba de normalidad Kolgomorov-Smimov y Shapiro-Wilk .....	73
Tabla 8. Prueba estadística no paramétrica por rangos .....	75
Tabla 9. Estadísticos de contraste <sup>a</sup> .....	75

## RESUMEN

El propósito de esta tesis, es determinar la estabilidad y la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de los sistemas autónomos no lineales, ya que no teníamos hasta ahora de ningún medio para establecer la estabilidad, salvo que hallemos efectivamente todas las soluciones del sistema, lo que puede resultar difícil si no imposible. Se investigó que la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal es posible determinarlo por medio de las propiedades de una función de Liapunov. La función de Liapunov es una función real de variable vectorial que en un punto de equilibrio se anula, y tiene un mínimo local estricto. Además, la función decrece a lo largo de la solución del sistema autónomo no lineal. Finalmente, la idea central es detectar estabilidad para un sistema autónomo no lineal por medio de las propiedades de una función, denominada Liapunov y esto se hace sin conocer las soluciones del sistema, solo la función.

**Palabras claves:** función multivariable de Liapunov, estabilidad y estabilidad asintótica.



## ABSTRACT

Presently work was carried out a study about the possibility of not determining the stability and stability asintotica of the points of balance of the autonomous systems lineal, since we didn't have up to now of any means to establish the stability, unless we find all the solutions of the system indeed, what can be difficult but impossible. It was investigated that the stability and stability asintotica of the points of balance of an autonomous system not lineal it is possible to determine it by means of the properties of a function of Liapunov. The function of Liapunov is a real function of vectorial variable that is annulled in a balance point, and he/she has a strict local minimum. Also, the function not falls along the solution of the autonomous system lineal. Finally the central idea is to not detect stability for an autonomous system lineal by means of the properties of a function, denominated Liapunov and this is made without knowing the solutions of the system, alone the function.

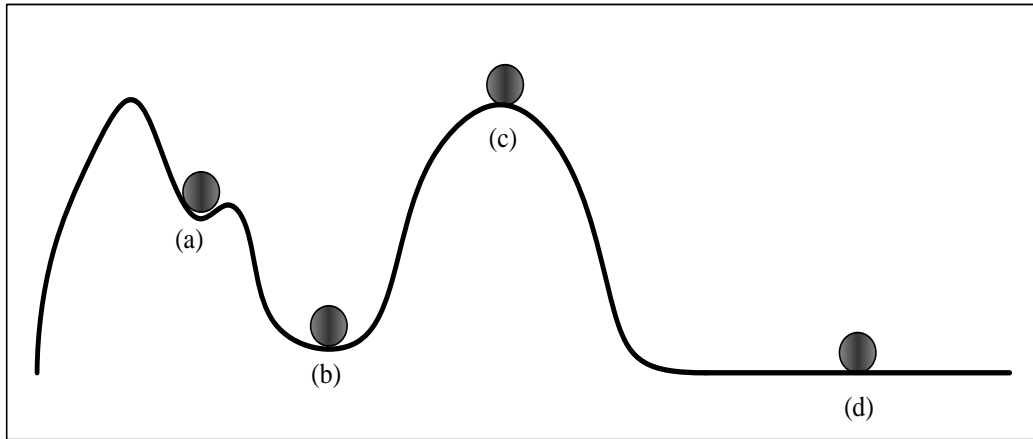
**Key words:** Liapunov multivariable function, stability and asymptotic stability.

## INTRODUCCIÓN

Los conceptos de estabilidad e inestabilidad están presentes en la vida diaria. Es costumbre decir: el dólar es estable, el sol peruano es inestable, el estado de salud de cierta persona es estable; incluso, en muchas áreas del conocimiento, se maneja dicho concepto de manera intuitiva, es común oír a un arquitecto decir que una estructura es estable o no lo es, un ingeniero químico dice que una reacción se ha estabilizado, un economista suele decir que el precio de determinado producto es estable, un físico diría que el movimiento de una partícula es estable (Galán, 2010). El aspecto más importante en el estudio de un sistema de control es determinar si el mismo es estable; es decir, en términos muy generales se dice que un sistema es estable si, estando inicialmente cerca del punto de operación deseado, permanece allí.

Entonces, un concepto (estabilidad) que aparece frecuentemente en todas las ciencias, merece ser definido en términos más precisos. No fue sino hasta 1892 cuando Liapunov formuló de manera precisa el concepto de estabilidad, y este ha sido el punto de partida para establecer otras variantes de tan importante concepto; De hecho, no hay concepto en la Matemática que admita tantas acepciones distintas como el de estabilidad y por este motivo, cuando se habla de estabilidad, se debe aclarar a cuál de ellas se refiere, para evitar ambigüedades (Galán, 2010).

Como ejemplo, tomar en consideración el movimiento de una esfera pequeña que se mueve bajo la acción de la gravedad sobre distintas superficies como las que se muestra en la figura 1.



**Figura 1.** (a) Asintóticamente estable, (b) Asintóticamente estable, (c) Inestable, (d) Estable no asintótica.  
Fuente: Galán (2010).

En los cuatro casos, la esferita se encuentra en una posición de equilibrio, pero ¿Cuál será el movimiento que ejecuta la esferita si la sacamos “un poco” de su estado de equilibrio y la soltamos? En los casos (a) y (b), la esferita se mantendrá cerca de su posición de equilibrio oscilando alrededor de esta, pero además, debido a la fricción, la esferita tendera a ocupar dicha posición de equilibrio. En ambos casos, el equilibrio se dice ser asintóticamente estable, la única diferencia que existe en estos dos casos, es que la “perturbación” que le hagamos a la esferita para sacarla de su estado de equilibrio para el caso (b) es mucho menor. Del mismo modo, en la esferita del inciso (c), cualquier “perturbación” por pequeña que esta sea, la esferita se alejara de su posición de equilibrio; en este caso el equilibrio es inestable. Finalmente, en (d), para cualquier “perturbación” pequeña de la esferita, esta permanecerá “cerca” de la posición de equilibrio pero no tendera a acercarse a dicha posición de equilibrio y estaremos en presencia de estabilidad no asintótica.

La estabilidad es el primer objetivo del ingeniero de control. Sin la estabilidad, el resto de especificaciones (rapidez del transitorio, oscilaciones reducidas, rechazo de perturbaciones, robustez) carecen de sentido. Para el caso de

sistemas lineales el concepto de estabilidad es claro, su condición necesaria y suficiente es bien conocida (parte real negativa de todos los polos de la función de transferencia o de los autovalores de la matriz de transición de estados) y existen criterios sencillos que permiten analizarla (como los conocidos criterios de Routh-Hurwitz y de Nyquist). Sin embargo, en sistemas no lineales el panorama es totalmente distinto: existen diversas definiciones de estabilidad (en realidad es preciso hablar de estabilidad de puntos de equilibrio o de otro tipo de conjuntos y no de estabilidad del sistema) y la mayoría de los criterios conocidos proporcionan condiciones suficientes pero no necesarias y, además, no suelen ser métodos sistemáticos como pueden ser los criterios mencionados en sistemas lineales.

Entre las teorías que permiten el análisis de estabilidad de sistemas no lineales, la teoría basada en funciones multivariables tiene un lugar destacado por la riqueza en la descripción de los diversos conceptos de estabilidad y los métodos de análisis de estabilidad que establecen condiciones suficientes. Una de las múltiples diferencias entre la estabilidad de los sistemas lineales y los no lineales es que en estos últimos puede tener un carácter local. En estos casos existe un conjunto de puntos alrededor del punto de equilibrio tales que si el sistema comienza en uno de estos puntos, la evolución del mismo tiende al equilibrio; sin embargo, si el sistema comienza en un punto fuera de este conjunto, la trayectoria divergirá hacia el infinito o hacia otro atractor. Por ejemplo, en el control de sistemas inestables, si la señal de control está saturada (lo que siempre sucede en la práctica) la estabilidad no puede ser global sino solamente local.

## **CAPÍTULO I**

### **EL PROBLEMA DE LA INVESTIGACIÓN**

#### **1.1. Descripción de la realidad problemática**

##### **1.1.1. Antecedentes del problema**

Se efectuó la respectiva búsqueda bibliográfica en las Universidades locales, nacionales e internacionales, encontrándose un número reducido de temas similares, lo que reafirma la necesidad de efectuar este problema como tema de investigación.

Pero, en la Escuela Superior de Ingenieros de la Universidad de Sevilla de España; el profesor Francisco Gordillo ha trabajado en un tema relacionado a la tesis y publicó un artículo cuyo título es “Estabilidad de Sistemas No Lineales Basada en la Teoría de funciones de Liapunov” creado en abril del 2009, cuyas conclusiones son; El análisis de estabilidad de los sistemas no lineales es un problema mucho más complicado que en el caso lineal. El comportamiento puede ser tan rico que existen múltiples definiciones de estabilidad incluso cuando nos referimos exclusivamente a estabilidad de puntos de equilibrio. La teoría proporciona un marco general que permite verificar si un equilibrio es estable según varias de sus definiciones. Sin embargo, hace falta en esta teoría un procedimiento general para construir funciones multivariantes.

Un problema relacionado con el análisis de estabilidad es el de estimación de la cuenca de atracción de un equilibrio (u otros tipos de conjuntos). Este problema tiene un interés práctico para conocer las regiones del espacio de estado con que se pueden considerar de operación segura. Sin embargo, el conocimiento exacto de la cuenca de atracción solamente es posible, en casos muy sencillos de dimensión baja por lo que normalmente es necesario acudir a estimaciones de la misma que son normalmente muy conservadoras (Gordillo, 2009).

Investigaciones realizadas sobre la estabilidad se basaron en el hecho bien conocido, de que un sistema físico pierde energía potencial en la vecindad de un punto de equilibrio estable. Más precisamente, un punto de equilibrio estable para un sistema físico es un punto en que la energía potencial del sistema tiene un mínimo local (hecho que se conoce en física como el teorema de Lagrange). La idea fue generalizada en un método muy útil para estudiar la estabilidad de un sistema autónomo no lineal, por medio de las propiedades de una cierta función multivariable, y esto se hace sin conocer las soluciones del sistema. Así, en caso donde las soluciones son imposibles podemos sin embargo obtener información valiosa sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, si logramos construir su función multivariable (Hirsh, 1983).

### **1.1.2. Problemática de la investigación**

Un sistema autónomo es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, con campo vectorial independiente del tiempo, y se representa de la forma siguiente:

$$\dot{x} = F(x),$$

Donde:  $F: W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación de clase  $C^1$  en un conjunto abierto  $W \subset \mathbb{R}^n$ .

Así mismo, un sistema autónomo es lineal, cuando  $W = \mathbb{R}^n$  y  $F(x) = Ax$ , siendo  $A$  una matriz (real)  $n \times n$ .

El sistema autónomo es no lineal si el campo vectorial es un conjunto abierto  $W \subset \mathbb{R}^n$  (Hirsh, 1983).

El análisis del sistema autónomo, se limita al estudio de tres aspectos fundamentales, los cuales son: Existencia, unicidad y estabilidad de las soluciones cerca de los puntos de equilibrio.

Especial interés son los puntos de equilibrio, que son aquellos estados que no cambian con el tiempo, es decir, la función constante que es idénticamente igual al punto de equilibrio es una solución del sistema autónomo y su trayectoria asociada se reducirá a un punto. Esto implica que el punto de equilibrio se anula en el campo vectorial (Kreider, 1978).

En estos términos, el problema de la teoría de la estabilidad y estabilidad asintótica es determinar las condiciones bajo las cuales una solución del sistema autónomo que se origina cerca de un punto de equilibrio de este sistema, permanecen cerca de ese punto, en cuyo caso decimos, que el punto de equilibrio es estable. Si además hay la posibilidad que tiendan hacia él con el transcurso del tiempo, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable. En caso contrario se dice que el punto de equilibrio es inestable.

La estabilidad y estabilidad asintótica del único punto de equilibrio del sistema autónomo lineal, se puede averiguar examinando los autovalores de la matriz cuadrada no singular. Será estable si: la matriz tiene al menos un par de

valores propios imaginarios puros de multiplicidad uno, o ningún par de valores propios imaginarios de multiplicidad mayor que uno, y ningún valor propio con partes lineales positivas.

Así mismo, será asintóticamente estable si las partes reales de todos los valores propios de la matriz cuadrada no singular son negativos. Y será Inestable, en cualquier otro caso (Hirsh, 1983). Pero, una dificultad presenta la estabilidad y la estabilidad asintótica para sistemas autónomos no lineales, como por ejemplo, no se tiene una matriz cuadrada no singular disponible para su análisis. Así, frente a la dificultad, determinar la estabilidad y la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio es un problema delicado, ya que no disponemos hasta ahora de ningún medio para determinar la estabilidad, salvo que hallemos efectivamente todas las soluciones del sistema autónomo no lineal, lo que puede resultar difícil si no imposible.

## **1.2. Definición del problema**

En la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann (UNJBG) de la Ciudad de Tacna, específicamente en la asignatura de ecuaciones diferenciales aplicadas del departamento de física y Escuela Profesional de Física Aplicada de la UNJBG, se ha presentado el problema de generalizar la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal por medio de las propiedades de una cierta función, y esto se hace sin conocer las soluciones del sistema.



### **1.2.1. Problema general**

¿Cómo obtener funciones multivariadas para el estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, en el departamento de física – UNJBG en el año 2013?

### **1.2.2. Problemas específicos**

- a) ¿Cómo establecer funciones multivariadas para el estudio generalizado de la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, en el departamento de física – UNJBG en el año 2013?
- b) ¿Cómo establecer funciones multivariadas para el estudio de la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, en el departamento de física – UNJBG en el año 2013?

## **1.3. Objetivos de la investigación**

### **1.3.1. Objetivo general**

Analizar la obtención de funciones multivariadas para el estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, en el Departamento de Física de la UNJBG en el año 2013.

### **1.3.2. Objetivos específicos**

- a) Aplicar las funciones multivariadas para el estudio generalizado de la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal.
- b) Aplicar las funciones multivariadas estrictas para el estudio generalizado de la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal.

#### **1.4. Justificación y limitaciones de la investigación**

La mayoría de los modelos matemáticos usados tradicionalmente por teóricos y prácticos en control y en muchas aplicaciones, son lineales. De hecho, los modelos lineales son mucho más manejables que los no lineales, y pueden representar en forma precisa el comportamiento de sistemas reales en muchos casos útiles. Sin embargo, los avances tecnológicos actuales han generado una enorme variedad de nuevos problemas y aplicaciones que son no lineales en esencia. Por ejemplo, fenómenos no lineales tales como equilibrios múltiples, ciclos límite, bifurcaciones, corrimiento de frecuencias y caos, se observan comúnmente en aplicaciones modernas importantes en ingeniería, tales como sistemas de comando de vuelo, manipuladores robot, sistemas de autopistas automatizadas, estructuras de ala de avión, y sistemas de inyección de combustible de alto rendimiento (Khalil,1996).

Tales fenómenos no lineales no se pueden describir mediante dinámica de modelos lineales; A decir, un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales su resolución en forma cerrada es prácticamente imposible y nuestra única ayuda son las técnicas cualitativas y los métodos numéricos. El análisis cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales, lineales y no lineales, es mucho más complicado que el de las ecuaciones, pero si solamente consideramos los sistemas autónomos será mucho más sencillo introducirnos en las técnicas cualitativas para obtener información sobre sus soluciones.

Investigaciones realizadas sobre estabilidad se basaron en el hecho bien conocido, de que un sistema físico pierde energía potencial en la vecindad de un punto de equilibrio estable. Más precisamente, un punto de equilibrio estable para

un sistema físico es un punto en que la energía potencial del sistema tiene un mínimo local (hecho que se conoce en física como el teorema de Lagrange). La idea fue generalizada en un método muy útil para estudiar la estabilidad de un sistema autónomo no lineal, por medio de las propiedades de una cierta función, denominada función multivariable y esto se hace sin conocer las soluciones del sistema. Así, en caso donde las soluciones son imposibles podemos sin embargo obtener información valiosa sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, si logramos construir su función del tipo multivariable (Hirsh, 1983) y (Peixoto, 1978).

El propósito de esta tesis, fue de contribuir a estudiar la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio del sistema autónomo no lineal sin resolver el sistema. Así mismo, permitirá superar las dificultades que se presenten al estudiar la estabilidad de algunos fenómenos físicos que son representados mediante un sistema autónomo, tales como: circuitos eléctricos, campos de fuerzas conservativos, movimiento pendular, circuitos electrónicos, control, y muchos más.

La tesis de maestría titulada “obtención de funciones multivariables para el estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, en el departamento de física – UNJBG en el año 2013” tiene un importante alcance a nivel nacional, porque busca investigar las soluciones cuantitativas de los sistemas autónomos no lineales de la física matemática. Pero, al mismo tiempo, tiene como principal limitación la numerosa bibliografía teórica desde la perspectiva de la enseñanza y aprendizaje de las ecuaciones diferenciales ordinarias, pero la inexistencia desde el enfoque de la solución sin resolver el sistema autónomo no lineal.

## 1.5. Variables

### 1.5.1. Caracterización de las variables

a) **Variable independiente:** Funciones Multivariantes.

b) **Variable dependiente:** Estabilidad y Estabilidad Asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal.

### 1.5.2. Definición operacional de las variables

#### A) Operacionalización de la variable independiente:

Para la variable independiente: Funciones multivariantes, su concepto operacional está dado por  $\hat{x} \in W$  que es un punto de equilibrio de  $\dot{x} = F(x)$ . Una función multivariable es una función de  $\hat{x}$ ,  $V: U(\hat{x}) \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciable definida en una vecindad  $U$  de  $\hat{x}$ , que satisface las siguientes condiciones:

$$(a) V(\hat{x}) = 0, V(x) > 0 \quad \forall x \neq \hat{x};$$

$$(b) \dot{V}(\hat{x}) \leq 0, \quad \text{en } U(\hat{x}).$$

Además una función multivariable es estricta si:

$$(c) \dot{V}(\hat{x}) < 0, \quad \text{en } U(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}$$

#### B) Operacionalización de la variable dependiente:

Para la variable dependiente: Estabilidad y Estabilidad Asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, su concepto operacional está dado por el punto de equilibrio  $\hat{x}$  del sistema autónomo no lineal que es estable, cuando para toda vecindad  $U$  de  $\hat{x}$  en  $W$  existe una vecindad  $U_1$  de  $\hat{x}$  tal que toda la  $x(t)$  con  $x(0) \in U_1$  está definida en  $U$  para todo  $t > 0$ . Un punto de equilibrio  $\hat{x}$  del sistema autónomo no lineal es asintóticamente estable si  $\hat{x}$  es estable y  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{x}$ .

## **1.6. Hipótesis de la investigación**

### **1.6.1. Hipótesis general**

La obtención de funciones multivariadas permite un mejor estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal a través de las propiedades de dichas funciones multivariadas.

### **1.6.2. Hipótesis específicas:**

a) La obtención de funciones multivariadas permite un mejor estudio generalizado de la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal a través de las propiedades de una función que en un punto de equilibrio se anula y tiene un mínimo local.

b) La obtención de funciones multivariadas permite un mejor estudio generalizado de la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal a través de las propiedades de una función multivariable estricta.

## **CAPÍTULO II**

### **MARCO TEÓRICO**

#### **2.1. Antecedentes de la investigación**

La estabilidad de una solución trivial del sistema

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x$$

depende de las raíces características de la correspondiente ecuación; donde  $x(t)$  es la matriz fundamental del sistema (Koeffitsientamy, 1958).

El comportamiento de una máquina síncrona se caracteriza por un sistema de cinco ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden no lineales que contienen términos periódicos; Estas ecuaciones se demuestra que tienen dos tipos diferentes de puntos de equilibrio. Mediante análisis linealizado los puntos del primer tipo son asintóticamente estables, mientras que todos los puntos del segundo tipo son localmente inestables (Szegö, 1970).

La investigación de una tubería que transporta un flujo de fluido pulsante ha demostrado que para valores de velocidad media del flujo que son pequeñas en comparación con el que causa inestabilidad estática ( $B < B^*$ ), hay pocas posibilidades de una inestabilidad que ocurre por dos razones. En primer lugar,

porque tener algo de amortiguación, existen todos los sistemas regiones de inestabilidad sólo si B supera un determinado valor crítico. En segundo lugar, incluso si B excede este valor, la gama de frecuencias que corresponden a situaciones inestables es muy limitado por las cantidades habituales de velocidad de fluctuación. A medida que aumenta el valor de B el rango de frecuencias inestables se ensancha, de modo que inestabilidad dinámica se vuelve más posible (Ginsberg, 1973).

Isaeva, deriva ecuaciones de movimiento para una tapa con una base esférica sobre una superficie perfectamente áspera, el elipsoide de inercia alrededor del centro de gravedad debe ser un elipsoide de revolución. Las primeras integrales de las ecuaciones de movimiento se obtienen y las condiciones de estabilidad de pequeñas vibraciones del eje superior alrededor de la vertical están decididos. Vamos a considerar la estabilidad de rotación de la parte superior sobre su vertical eje  $\zeta$ , que es la estabilidad de movimiento dado por la solución particular de las ecuaciones de movimiento; las primeras integrales del movimiento perturbado son  $V = V_1 + \gamma V_2 + \mu V_3 + \delta V_4 + \beta V_4^2$ ; la función de Liapunov se construye mediante el método Chetaev en la forma de una combinación de las integrales (Isaeva, 1959).

Erugin, presenta un método asintótico para la determinación de los valores propios de ciertos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, y las técnicas para la determinación de la matriz exponencial. El radio de convergencia está indicado para la serie que representa los invariantes de la matriz exponencial (Erugin, 1959).

Mediante el uso de las primeras integrales de las ecuaciones de movimiento de un giroscopio en cardanes se demostró en este artículo que una pequeña

perturbación arbitraria del anillo interior provoca un movimiento de precesión del anillo exterior, que desplaza el eje del rotor a partir de su posición inicial. Se han construido funciones de Liapunov y dadas las condiciones para la estabilidad de la precesión y para la rotación permanente de un giroscopio. Mediante el uso de las ecuaciones de movimiento y las cuadraturas resultantes de un sistema giroscópico, la inestabilidad del eje del giroscopio puede ser demostrada (Lunts, 1960).

Existe una solución del problema de cómo construir controles analíticos para dar la estabilidad óptima a un cuerpo rígido con un punto fijo. Se aplica un teorema relacionado con el método directo de Liapunov. Se considera un sistema mecánico que consiste en un cuerpo rígido (una plataforma) con un punto fijo. Sus ejes principales de inercia coinciden con los tres ejes de simétrica homogénea para péndulos. Estos péndulos se ponen en movimiento por motores especiales. Tal sistema puede ser considerado como un giróstato su distribución de la masa no cambia en el proceso de movimiento. Se deja que el punto fijo coincida con el centro de masa (Krementulo, 1966).

Cuando los cristales se cultivan en forma de masa fundida, su sección transversal se determina por la forma de la columna de la masa fundida. El cristal el radio y la altura de la parte delantera de cristalización pueden variar de forma independiente, es decir, tratamos con un sistema de dos grados de libertad. La estabilidad de este sistema es investigado por el método de Lyapunov. Se introducen los conceptos de capilares y estabilidades térmicas. La estabilidad del sistema depende de la forma del cristal desmenuzado, las condiciones de contorno para la columna de la masa fundida, y de las condiciones térmicas durante la extracción (Brener, 1980).



El artículo, de Pierangelo, trata de la estabilidad asintótica de la solución nula de una ecuación diferencial parcial semilineal. Por el principio de LaSalle de invariancia se ha utilizado para obtener los resultados de la estabilidad. El primer resultado se da bajo hipótesis muy generales asumiendo solamente la compactación previa de las órbitas y la existencia local. En la segunda parte, bajo ciertas restricciones, condiciones suficientes para compactación previa de las órbitas y se da la descomposición de soluciones (Marcati, 1984).

En cierto modo los resultados son bastante sorprendentes. Tiene mucho sentido considerar un proceso de ajuste de largo plazo con salida y entrada de empresas, dependiendo de niveles de los beneficios, no tiene mucho sentido; sin embargo, si el proceso de ajuste a corto plazo que establece los niveles de ganancias es inestable. Por lo que parece razonable limitar la atención a un ajuste a corto plazo estable. Sin embargo, que el ajuste de corto plazo estable es tanteo walrasiano, que implica, en realidad sin ningún tipo de restricción más allá de ninguna producción conjunta, locales la estabilidad del ajuste marshalliano a largo plazo, y por lo tanto que el largo plazo se alcanza el equilibrio competitivo (Svensson, 1984).

Hay que mencionar que el teorema fue fuertemente motivado por el antes mencionado contra ejemplo a Markus -Yamabe que tiene el plano como atractor global. En nuestro medio, las condiciones técnicas proporcionan la necesaria estimación, mostrando que las órbitas convergen al plano que debe seguir a las órbitas en el plano invariante. Como se observó anteriormente, también fueron motivados por la observación de que una versión de la famosa condición Palais-Smale, asume con frecuencia en la teoría del punto crítico, puede ser combinado con el método directo de Liapunov para estudiar el comportamiento de las órbitas

de un sistema dinámico. Por último, observamos que los resultados muestran que la condición semi-completa implica hipótesis geométricas que podría ser de utilidad en nuestro medio. En la segunda parte de este trabajo, se presenta un resultado en la estabilidad asintótica mundial para el problema de dos dimensiones cuando la condición no se mantiene en todo el espacio (Silva & Teixeira, 2002).

Llegamos a la conclusión de que la desigualdad

$$(Cr_0 + C_2w)^2 + 4AMga_1 > 0$$

es la condición necesaria y suficiente de estabilidad de un giroscopio de rotación alrededor de un eje vertical en un plano horizontal absolutamente liso (Rumiantsev, 1961).

Como es bien conocido de las aplicaciones clásicas de las ciencias eléctricas y mecánicas, la energía es una función de Liapunov adecuada; así, por analogía, todas las funciones de energía propuestas en ecología son posibles funciones de Liapunov. En este trabajo, un modelo generalizado Lotka-Volterra es considerado y las propiedades de estabilidad de su equilibrio no trivial se estudian por medio de una función de energía, primero propuesto por Volterra en el contexto de ecosistema conservador. La ventaja de esta función de Liapunov con respecto a la que puede ser inducida a través de linealización también se ilustra (Rinaldi, 1977).

En un artículo ya clásico, Rosenzweig y MacArthur (1963) obtuvo un método gráfico, basado en intersección de isóclinas, por la determinación de la estabilidad del equilibrio interior de una de dos especies de un sistema depredador-presa. El método consiste en graficar ambas presas y depredador con isóclinas en un sistema de coordenadas cartesianas y observando que en el caso en que la isóclina depredador es vertical, si la intersección se produce en un punto de aumento

de la isóclina presa, el equilibrio es inestable, mientras que si la intersección se produce en un punto de disminución, el equilibrio es asintóticamente estable. Una prueba algebraica rigurosa se da en Freedman (1976). Varios otros métodos gráficos equivalentes a la Rosenzweig y Método MacArthur también se han desarrollado. Más recientemente Armstrong (1976) describe otro método gráfico que se indica en términos de las líneas tangentes al tanto de la específica curva de crecimiento y la curva de la depredación en el equilibrio (Freedman, 1979).

Existen trabajos que estudian las propiedades de estabilidad de sistemas de variable lineal en tiempo discreto de dimensión infinita. La clase de sistemas puede ser descrito por ecuaciones en diferencias lineales en un espacio de Banach de dimensiones finitas (Rolewicz, 1984).

En el trabajo, de Liu y Chen, desarrolló el sistema II depredador-presa Lotka-Volterra tipo Holling, que puede oscilar por sí, por la introducción periódica de inmigración impulsiva constante del depredador. Se da la condición para el sistema que se había extinguido y la condición de permanencia se establece a través del método de comparación que implica múltiples funciones de Liapunov; más lejos influencias de perturbaciones impulsivas en los que la oscilación inherente se estudian numéricamente, lo que demuestra que con el cada vez mayor de la cantidad de la inmigración, el sistema experimenta proceso de oscilación cuasi-periódica ciclos - periódica cascada duplicación - el caos - periódica cascada Halving - ciclos, que se caracteriza por su cuasi-período oscilante, periodo de duplicación, Período de Halving, la dinámica no únicos, lo que significa que varios atractores coexisten (X. Liu & Chen, 2003).

Existen trabajos en que se ha aplicado con éxito la metodología del diseño de observadores, llamada Técnica de Diseño Disipativo a sistemas con no linealidades multivaluadas, o discontinuas, previa convexificación. Esta técnica generaliza y mejora algunos métodos de diseño de observadores y, en particular, elimina las restricciones del método propuesto en (Heemels et al., 2005) y (Juloski et al., 2006). Puede ser aplicada a sistemas con no linealidades discontinuas, no monótonas, no cuadradas, y no requiere unicidad de soluciones del observador. En el caso de soluciones múltiples, la respuesta del observador converge a la solución específica que se presente en el sistema (Osorio & Moreno, 2008).

El artículo, de Taousser, trató sobre el análisis de estabilidad de una clase de sistemas uniformes en los dominios de tiempo incierto; La clase considerada consiste en sistemas dinámicos que conmuten entre un subsistema de tiempo continuo incierto y un subsistema de tiempo discreto incierto durante un cierto período de tiempo. Se utiliza la teoría de las ecuaciones dinámicas en la escala de tiempo para estudiar la estabilidad de estos sistemas en dominios de tiempo no uniformes formadas por una unión de intervalos disjuntos con longitud variable y la brecha variable. Utilizando el concepto de común de Función de Liapunov, condiciones suficientes se derivan para garantizar la estabilidad asintótica de esta clase de sistemas en la escala de tiempo con la función de grado de aspereza acotada (Taousser, Defoort, & Djemai, 2015).

El trabajo, de Wang, investigó la estabilidad de entrada a estado para sistemas de retardo de entrada no lineal conmutadas bajo conmutación asíncrona. Supongamos que una ley de control de realimentación ha sido diseñada de tal manera que el nominal sistema de circuito cerrado es exponencialmente estable para

una señal de conmutación determinado, y supongamos además que una correspondiente función de Liapunov para el sistema de circuito cerrado nominal está disponible. En presencia de entrada demora y de conmutación asíncrona, el sistema puede no ser estable en la misma señal de conmutación. Por este caso, construir explícitamente funcionales Liapunov-Krasovskii basados en el conocimiento de lo conocido Función de Liapunov. Entonces, mediante el uso de los funcionales Liapunov-Krasovskii construidos, una nueva conmutación señal de conmutación de retardo dependiente de la satisfacción de las nuevas condiciones de tiempo promedio de permanencia en modo dependiente es proporcionado para garantizar la estabilidad de entrada a estado del sistema con respecto a la perturbación bajo un cierto retraso de entrada obligado (Wang, Sun, & Wu, 2015).

El método directo de Liapunov proporciona un enfoque muy eficaz para analizar la estabilidad de sistemas no lineales, sin embargo, la regla de Leibniz conocido, no es adecuado para la derivada fraccional. Este trabajo se ocupó de los sistemas no lineales fraccionarios y varios criterios algebraicos de Mittag-Leffler y la estabilidad asintótica se obtienen mediante el uso de S-Procedimiento y técnica analítica. Por último, se da un ejemplo para demostrar que es muy conveniente para comprobar la estabilidad de los sistemas de prácticas mediante el uso de métodos de nuestra propuesta (S. Liu, Jiang, Li, & Zhou, 2016).

El artículo, de Iñarrea, se centró en un sistema Hénon-Heiles generalizada en un sistema de referencia en rotación, de tal manera que parecen puntos de equilibrio de Lagrange similares. Nuestro objetivo es estudiar sus propiedades de estabilidad no lineal para comprender mejor la dinámica en torno a estos puntos. Se demuestra que las condiciones en los parámetros libres para tener estabilidad y

demostrar el carácter superestable del origen para el caso clásico; se trata de un punto de equilibrio estable independientemente del valor de frecuencia del bastidor giratorio (Iñarrea et al., 2015).

El trabajo, de Ning, investigó, el problema de la entrada a la estabilidad del estado (ISS) para sistemas no lineales con retardo de tiempo. Una funcional continuamente diferenciable de Liapunov - Krasovskii con derivada indefinida se introduce para derivar la ISS de los sistemas, que generaliza la clásica funcional Liapunov - Krasovskii con derivada definida positiva. Como resultado, la estabilidad uniforme y criterios de estabilidad asintótica uniformes de los sistemas no lineales con retardo de tiempo también se establecen mediante el empleo de la propuesta de la funcional de Liapunov-Krasovskii (Ning, He, Wu, & Zhou, 2015).

El artículo de Duarte presentó dos nuevos lemas relacionados con las derivadas fraccionarias, para el caso de las formas cuadráticas generales y para el caso en que la traza del producto de una matriz rectangular y su transpuesta aparecen. Esos dos lemas permiten el uso de funciones de Liapunov cuadráticas generales y la traza de una matriz dentro de una función de Liapunov respectivamente, a fin de aplicar la extensión de orden fraccional de método directo de Liapunov, al analizar la estabilidad de los sistemas de orden fraccional (FOS). Además, el artículo presenta un teorema para demostrar la estabilidad uniforme en el sentido de Liapunov para sistemas de orden fraccionarios. El teorema puede ser visto como un complemento de otros métodos ya disponibles en la literatura (Duarte-Mermoud, Aguila-Camacho, Gallegos, & Castro-Linares, 2015).

El artículo de Fannam y Esfanjani, investigó el problema del análisis de estabilidad para una clase de sistemas lineales con retardo de intervalo variable en

el tiempo. Con el fin de desarrollar una condición menos conservadora de estabilidad, se introduce una funcional Liapunov-Krasovskii novedosa que comprende términos integrales. La idea de combinación convexa se utiliza para derivar un criterio de estabilidad en términos de desigualdades matriciales lineales (LMI) sin ningún tipo de matrices adicionales libres de ponderación que aumentan drásticamente la carga computacional de la prueba de estabilidad. Ejemplos numéricos se presentan para ilustrar la superioridad del enfoque propuesto en comparación con algunas de las existentes en la literatura (Farnam & Mahboobi Esfanjani, 2016).

En el trabajo, de Khansari, se propuso un enfoque de aprendizaje de imitación que explota el poder de control de Liapunov, esquema de control de funciones (CLF) para garantizar la estabilidad asintótica global de la DS no lineales. Dado un conjunto de demostraciones de una tarea, nuestro enfoque procede en tres pasos: (1) el aprendizaje de una función de Liapunov válida de las manifestaciones de la solución de un problema de optimización con restricciones, (2) El uso de uno de los estados the-state-of-the-art técnicas de regresión para modelar una estimación (inestable) de la moción de las manifestaciones, y (3) El uso de (1) Para asegurar la estabilidad de los (2) durante la ejecución de la tarea a través de la solución de un convexo limitado de problemas de optimización. El enfoque propuesto permite el aprendizaje de un conjunto más amplio de movimientos del robot en comparación a los métodos existentes que se basan en las funciones cuadráticas Liapunov. Además, mediante el uso del formalismo CLF, el problema de garantizar la estabilidad de las mociones DS se independiza de la elección de método de regresión. Por lo tanto, permite al usuario adoptar la técnica más

adecuada en función de requisitos de la tarea en cuestión, sin comprometer la estabilidad (Mohammad Khansari-Zadeh & Billard, 2014).

El problema de análisis de estabilidad relajada de tiempo discreto para sistemas difusos Takagi-Sugeno se investigó en este documento. Resultados diferentes de los existentes en la literatura que son único parámetro depende de las variables de estado del sistema cuadrático, una nueva función de Lyapunov no cuadrática aumentada, la cual es formulada en una forma de orden superior de las variables de estado del sistema que esos resultados existentes, se ha desarrollado para la consecución de la tarea de análisis de estabilidad con menos conservadurismo. Más importante aún, se puede demostrar que el enfoque propuesto en el documento contiene la existencia, como un caso especial. Finalmente, el enfoque efectivo propuesto se ilustró por medio de experimentos numéricos (Xie & Hu, 2015).

El trabajo, de Chen, llama la atención sobre la existencia del teorema de estabilidad de Liapunov de orden fraccional que está estrictamente descrito por fórmulas matemáticas. En primer lugar, se introduce el orden fraccional de la función de Liapunov basado en la definición de cálculo fraccional y el orden entero para la teoría de Liapunov. Usando el teorema de estabilidad clásica de sistemas de orden fraccional lineales, se demostró convincentemente la existencia de orden fraccional, función de Liapunov y presenta una descripción matemática de orden fraccional, teorema de estabilidad de Liapunov. Además, como ejemplo, se aplicó el teorema de estabilidad de Liapunov y de orden fraccionario presentado la sincronización de ambas redes complejas directas y no dirigidas con ecuaciones de orden fraccional. Un controlador de nodos T-S modelo difuso basado en el teorema



propuesto con nodos mínimos de control está diseñado. Finalmente, las simulaciones numéricas son un acuerdo con el análisis teórico, ambos confirmaron la corrección de la teoría presentada (Chen, Zhang, Liu, & Ma, 2014).

La dificultad de un teorema estable para la estabilidad de Liapunov directa fraccional, radica en que la forma de diseñar una función positiva definida  $V$  y comprobar fácilmente si es de derivada fraccionaria, en donde la función  $V$  es menor que cero. En vista de esta dificultad, se propone un teorema de estabilidad de Liapunov para sistemas fraccionales sin demora y extender el teorema recién propuesto fraccional para sistema con retardo. La diferencia obvia de la teoría de Liapunov propuesta con la derivada fraccionada, teoría directa que se está tomando la derivada de enteros en lugar de la derivada fraccional de la función definida positiva  $V$ . Cuatro ejemplos se proporcionaron para ilustrar la propuesta del teorema. Los que estudian los resultados en este trabajo muestran que el teorema propuesto no sólo es aplicable al sistema autónomo fraccional con y sin retraso, pero también es aplicable al sistema no autónomo fraccional con y sin demora (Hu, Lu, Zhang, & Zhao, 2015).

Recientemente, un documento ha sido publicado en el que los autores presentan dos teoremas; uno relativo a la extensión fraccionada del método directo de Liapunov (Teorema 1) y el otro con respecto a la estabilidad del tiempo lineal para sistemas invariantes fraccionados (Teorema 2). Teorema 1 y el Teorema 2, sin embargo, no necesitan las manifestaciones, ya que son directas conclusiones de otros resultados ya disponibles en la literatura. Sin embargo, la prueba dada del teorema 2 contiene una incorrecta utilización de la regla de la cadena de derivadas fraccionarias. El teorema 1 se refiere a la estabilidad asintótica de sistemas de orden

fraccionario. Los autores hacen primero una referencia al teorema A1. Sobre la base de esta referencia, los autores introducen entonces teorema 1. Sin embargo, el teorema 1 es sólo otra forma de escribir el teorema A1, teniendo en cuenta la relación entre las funciones de la clase-K y funciones definidas positivas (Aguila-Camacho & Duarte-Mermoud, 2015).

En trabajo, de Nishimura, deriva la teoría de la estabilidad de Liapunov para sistemas rugosos, que son sistemas dinámicos impulsados por caminos ásperos. Para simplificar la discusión, sólo tenemos en cuenta la clase de carriles ásperos geométricos que contiene algunos procesos límite de entradas periódicas y los procesos de Wiener creados por algunos teoremas de aproximación tales como McShane y Wong. La principal ventaja del análisis de sendero áspero está haciendo mapas Ito continuo; por lo tanto, los análisis de estabilidad asintótica relacionados nos permiten considerar determinísticamente y estocásticamente nociones de estabilidad en forma uniforme. Este trabajo es el primer paso para demostrar la eficacia del análisis camino áspero en el análisis de la estabilidad y la estabilización diseñada para los sistemas dinámicos no lineales para tener varias señales de variación sin límites (Nishimura, 2015).

Duran y Córdova en su artículo analizaron la estabilidad del reactor PFTR isotérmico y no isotérmico para una reacción con cinética de primer orden utilizando la funcional de Liapunov; su objetivo fue mostrar cómo se aplica esta funcional para parámetros distribuidos, dado que es casi inexistente la literatura sobre el método de la funcional de Liapunov aplicada a la estabilidad de reactores (técnica usada en el análisis de estabilidad de sistemas en ingeniería eléctrica). El análisis de estabilidad dio como resultado perfiles de temperatura y concentración

asintótica estables para los casos PFTR isotérmico, no isotérmico con constante cinética independiente de la temperatura y PFTR no isotérmico adiabático. Para el PFTR con retiro de calor el análisis condujo a una región de estabilidad asíntótica y a una región incierta donde puede o no haber oscilaciones (Córdova, 2007).

Reciente investigación de los LCS desde el punto de vista combinado de la teoría de sistemas y la programación matemática, este trabajo abordó las propiedades teóricas importantes del sistema exponencial y estabilidad asíntótica para un LCS con una trayectoria de estado. La novedad de nuestro enfoque radicó en el empleo de una función Liapunov cuadrática que involucra la variable algebraica auxiliar de la LCS; cuando se expresa en la variable de estado solo, la función de Liapunov es cuadrática por partes, y por lo tanto no lisa. La característica de no tersura invalida el análisis de estabilidad estándar que se basa en suavizar funciones de Liapunov. Además de proporcionar condiciones suficientes para la estabilidad exponencial, establecemos una generalización de la conocida invariancia teorema de LaSalle para la estabilidad asíntótica de un sistema dinámico suave a las LCS, que es intrínsecamente un sistema no liso (Shen, 2006).

Huang, estudió el modelo de población estructurado por edad básica que describe el proceso de infección por VIH, que se define por las PDE. El modelo permitió que la tasa de producción de partículas virales y de la tasa de mortalidad de las células infectadas productivamente a variar y depende de la edad de la infección. Mediante el uso directo del método y la construcción de las funciones adecuadas de Liapunov; propiedades dinámicas del modelo estructurado sin (o con) el tratamiento farmacológico. Los resultados mostraron que la estabilidad asíntótica del estado estable libre de infección y el estado estacionario de infectados

sólo depende del número reproductivo básico determinado por el tamaño de contagio. Además, se estableció matemáticamente que los modelos de la ODE típica y DDE (ecuación diferencial de retraso) de la infección por el VIH son equivalentes a dos casos especiales de los modelos anteriores de la PDE (Huang et al., 2012).

El en trabajo, de Yuandan, presentó un teorema de la función inversa de Liapunov motivado por el análisis robusto de control y diseño. El resultado se basó en los teoremas clásicos, pero generaliza, varios aspectos conocidos de estos teoremas clásicos. De una manera unificada y natural, (1) permite involucrarse a las variables acotadas de tiempo arbitraria, incluir parámetros en la descripción del sistema, (2) se ocupa de la estabilidad asintótica mundial, (3) los resultados en (infinitamente diferenciables) funciones de Liapunov lisas, y (4) se aplica a la estabilidad con respecto a no necesariamente conjuntos invariantes compactos (Yuandan Lint, Eduardo D. Sontag, 2003).

El artículo, de Liu y Hill, propuso un nuevo método de análisis de estabilidad llamado el evento a tiempo híbrido, que son función de Liapunov con un enfoque (HTLF) de tiempo discreto a sistemas con cambio de retraso (DDSS). Dos tipos de las nociones de estabilidad (GUAS y eventos GUAS) se proponen para reflejar los efectos sobre la estabilidad de eventos. Un resultado básico estabilidad se deriva: a DDSS tiene evento de GUAS si y sólo si existe un HTLF que es estrictamente decreciente y converge a cero. Por otra parte, algunas condiciones suficientes expresadas por los teoremas de estabilidad de tipo Razumihin HTLF se establecen. El tema de la impulsiva se estudia la estabilización para DDSS. Está comprobado que un DDSS inestable puede ser estabilizado por control impulsiva.

Y también se consigue la estabilización impulsiva a la estabilidad de entrada a estado de DDSS (Hill, 2014).

El trabajo, de Sontag y Wang, presentó caracterizaciones necesarias y suficientes de varias nociones de entrada a la estabilidad de salida. Se han encontrado caracterizaciones Liapunov similares a jugar un papel clave en el análisis de la entrada para indicar propiedad de estabilidad, y los resultados se dan aquí para extender su validez para el caso cuando la salida, pero no necesariamente todo el estado interno, está siendo regulado (Sontag & Wang, 2000).

Feng y Zhu, propuso un procedimiento para el estudio de la estabilidad asintótica de Liapunov con probabilidad uno de un sistema de Duffing con control de realimentación con retardo de tiempo, bajo excitación paramétrica de ruido acotado. El procedimiento consiste en expresar la fuerza mediante el control de retroalimentación con retardo en términos de variables de estado y sin retardo de tiempo mediante el uso de funciones armónicas generalizadas. (Feng & Zhu, 2008).

El análisis de la estabilidad de los sistemas que tienen un equilibrio continuo, Bhat y Bernstein proponen para el análisis dos nociones que son de particular relevancia para este tipo de sistemas; son la convergencia y semiestabilidad. Convergencia es la propiedad por la que toda solución converge a un punto límite que puede depender de la condición inicial. La semiestabilidad es el requisito adicional de que todas las soluciones convergen para limitar puntos de Liapunov que son estables. Proporcionamos nuevos resultados basados en la función de Liapunov para la convergencia y semiestabilidad de sistemas no lineales. Estos resultados no hacen suposiciones definitivas en el signo de la función de Liapunov. En cambio, nuestros resultados, utilizan una condición novedosa basada

en no tangencia entre el campo vectorial y subconjuntos invariantes o negativamente invariantes del nivel o subnivel de conjuntos de la función de Liapunov o su derivada y representan extensiones de resultados de estabilidad previamente conocidos que implican funciones semidefinidas de Liapunov. Para ilustrar nuestros resultados se dedujo la convergencia y de la semiestabilidad de la cinética de la reacción química de Michaelis-Menten y la dinámica en bucle cerrado de un escalar bajo un sistema de adaptación universal de la estabilización del controlador de retroalimentación (Bernstein, 2003).

Ambrosino en el problema de análisis de robustez para un sistema lineal incierto sujeto a incertidumbres paramétricas variables en el tiempo, considera que nuestra principal aportación consiste en un nuevo procedimiento para construir directamente, en el caso general de  $n$  dimensiones, una función de Liapunov poliédrica, que nos permite demostrar la estabilidad robusta del sistema en cuestión, resolviendo iterativamente un problema de optimización lineal. Con respecto a nuestro trabajo previo, este trabajo reduce la carga computacional para el cálculo de la función poliédrica. Por otra parte, algunos ejemplos de referencia muestran que nuestra metodología puede realizar mucho mejor en términos de grado de conservadurismo que los métodos anteriores basados tanto en las funciones poliédricas y otros clases de funciones de Liapunov no cuadráticas (R. Ambrosino, M. Ariola, 2012).

Según Macconley los sistemas de control no lineales se pueden estabilizar mediante la construcción de funciones de control de Liapunov y el cálculo de las regiones del espacio de estados sobre los cuales dichas funciones disminuyen a lo largo de trayectorias del sistema de un circuito cerrado en virtud de una ley de

control apropiado. Este trabajo analizó la complejidad computacional de estos procedimientos para dos clases de funciones de control de Liapunov. Los sistemas considerados son aquellos que son no lineales en sólo unas pocas variables de estado y que puede ser afectado por las limitaciones y los desórdenes acotados. En este artículo se extendió el trabajo previo de los autores, que desarrollaron un procedimiento para el análisis de la estabilidad de estos sistemas cuya complejidad computacional es exponencial sólo en la dimensión de los estados "no lineales y polinómica en la dimensión de los restantes estados. Los principales resultados se ilustran mediante un ejemplo numérico para el caso de funciones puramente de control de Liapunov cuadrática (Marc W. Mcconley, Brent D. Appleby, Munther A. Dahleh, 1998).

En el artículo, de Giacobbe y Mulone, se demostró dos hechos principales:

1. El método de reducción canónica u otros métodos heurísticos para construir (monótonamente decreciente a lo largo de la solución del sistema) funciones óptimas de Liapunov tienen que ser utilizadas cuidadosamente para tratar con sistema que tienen los modos no principales cuyos valores propios tienen parte real negativa, pero no cero para la parte imaginaria, ya que probablemente ocurra. En tales sistemas los modos no principales no pueden ser monótonamente controlados por una única norma, a pesar de su convergencia exponencial rápida para el equilibrio.
2. Esta dificultad se puede superar mediante el uso de la definición de la función débil de Liapunov, que permite probar con una sola función, que el equilibrio espectralmente estable es realmente asintóticamente estable para cada elección de los parámetros (en nuestro caso el número de Taylor  $T^2$ ).

En este artículo se considera sólo el caso más simple del sistema lineal. Esperamos que, con más dificultades analíticas debido a la estimación de los términos no lineales, el mismo enfoque puede ser utilizado en sistemas no lineales (Giacobbe & Mulone, 2014).

En el trabajo, de Karafyllis y Tsinias, se proporciona caracterizaciones equivalentes para el concepto de estabilidad asintótica global (RGA) robusta para sistemas de tiempo variable. Se dan caracterizaciones de Liapunov para este concepto, así como para el concepto de estabilidad no uniforme en el tiempo de entrada a estado (ISS). Por otra parte, hemos proporcionado las condiciones necesarias y suficientes para el tiempo de estabilización ISS no uniforme en los sistemas de control por medio de una retroalimentación variable en el tiempo. También se presentó una fórmula explícita para el estabilizador de retroalimentación variable en el tiempo (Tsinias, 2003).

El propósito del trabajo de Florchinger, es estudiar el problema de estabilización para sistemas estocásticos de control no lineales accionados por un proceso de Wiener. Así mismo establecer condiciones suficientes para la existencia de la estabilización mediante las leyes de retroalimentación que son lisas, excepto posiblemente en el punto del sistema de equilibrio, son proporcionados por medio de técnicas estocásticas de Liapunov. Se introdujo la probabilidad de la noción de estabilidad asintótica dinámica de los sistemas de control diferenciales estocásticos y se estudió la estabilización por medio de controladores dinámicos (Florchinger, 1995).

Aldibekov y Aldazharova, en su artículo, estudiaron los términos de exponentes generalizados de Liapunov, que demostraron un análogo del teorema



de Liapunov sobre la estabilidad por la primera aproximación para el caso en el que el exponente superior es cero (Aldibekov & Aldazharova, 2014).

En el trabajo, de Fitzgibbon, se mostró una amplia clase de sistemas de reacción-difusión con condiciones límite Neumann que en la presencia de una estructura separable de Liapunov, la existencia de una estimación a priori  $L^r$ , uniforme en el tiempo, para algunos  $r > 0$ , implica la estabilidad  $L^r$ -uniforme de estados estacionarios. Los resultados se aplicaron a una clase general de los sistemas de Lotka-Volterra y se ven para proporcionar una respuesta parcial a la pregunta existencia global para una amplia clase de sistemas equilibrados no linealidades que no están limitado por cualquier polinomio (W. B. Fitzgibbon, S. L. Hollis, 1997).

Chen y sus colaboradores, con el fin de explotar los nuevos y ricos yacimientos de petróleo y gas bajo el océano, debemos estar dispuestos a ahondar en aguas muy profundas. Muchos campos prometedores están situados en aguas 4000-7000 pies de profundidad. Un diseño de la plataforma favorita en ese ambiente es el sistema de TLP, que se compone de un casco conectado al fondo del mar por las cuerdas tendinosas de tuberías, lo que resulta en una estructura estable. Dado que la longitud del tendón, así como aumentar la presión del agua proporcionalmente a la profundidad del agua, la resistencia de las tuberías del tendón a colapsar es crítica, especialmente en lo profundo del ambiente acuático. En este estudio, se describe una nueva forma de analizar la estabilidad de una de un sistema TLP. Los resultados muestran que la respuesta de la estructura flotante está influenciada por la estructura de masa, lo que provoca diferentes perfiles de movimiento de sobretensión. La respuesta de la estructura de flotación alcanza su

mayor nivel de desplazamiento durante la resonancia. El fenómeno resonante tiene lugar mientras la onda de frecuencia se mueve sin dimensiones a los valores inferior a 0,5 - 1,0. También obtenemos condiciones de estabilidad para el TLP que utilizan modelos TS, si esta condición de estabilidad se cumple, se garantiza la estabilidad de la TLP. Una simulación numérica se lleva a cabo para demostrar el análisis de estabilidad. Esta propuesta metodología podría aplicarse en sistemas de estructuras oceánicas reales (Cheng-Wu Chen, Chien-wen Shen, Chen-Yuan Chen, 2010).

Para el proceso de crecimiento de los cristales Bridgman dewetted, en condiciones de gravedad cero, es posible desarrollar un modelo matemático definido por un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias que rigen la evolución de la interfaz de la masa sólida fundida y el radio del cristal. En este modelo, la estabilidad del proceso significa que durante el crecimiento no hay reinsertión del cristal crecido hasta la pared del crisol interior. Usando este modelo, una gama de la diferencia de presión de gas residual se encuentra de tal manera que si la diferencia de presión está en el intervalo prescrito durante el crecimiento, que el proceso es estable (Balint & Epure, 2011).

En su artículo, Abedi, establece la caracterización similar de Liapunov para la probabilidad en el problema de la estabilidad de entrada a estado en los sistemas de control estocásticos no autónomos. Se extiende el conocido teorema Artstein-Sontag para derivar las condiciones necesarias y suficientes para la estabilización de entrada a estado de los sistemas de control estocásticos. También nos proporcionan un ejemplo ilustrativo en su artículo (Abedi, Leong, & Abedi, 2015).

En este trabajo, Redkar, presenta las técnicas computacionales simples y eficientes para garantizar condiciones suficientes para la estabilidad asintótica casi

segura de los sistemas cuasiperiódicos, presentamos algunas observaciones sobre la estabilidad y la capacidad de reducción de los sistemas cuasiperiódicos. En un sistema cuasiperiódico, la periodicidad de la excitación paramétrica es inconmensurable con la periodicidad de ciertos términos como la multiplicación del vector de estado. Se presenta un enfoque de tipo Liapunov y el enfoque Liapunov-Floquet (L-F) que se transforma al derivar las condiciones de estabilidad. Este enfoque puede ser utilizado para investigar la solidez, margen de estabilidad, y el controlador de diseño para el sistema (Redkar, 2012).

## 2.2. Bases teóricas

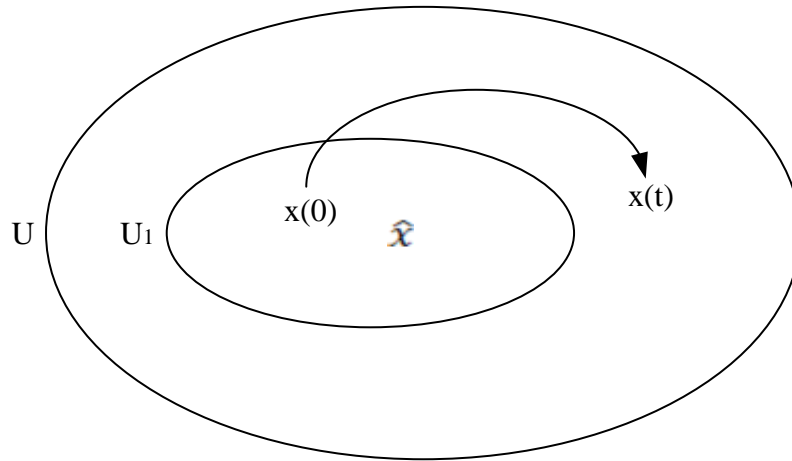
Consideremos el sistema autónomo no lineal en  $\mathbb{R}^n$  descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{x} = F(x), \quad (2.1)$$

siendo  $F: W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación de clase  $C^1$ , donde  $W$  es un conjunto abierto.

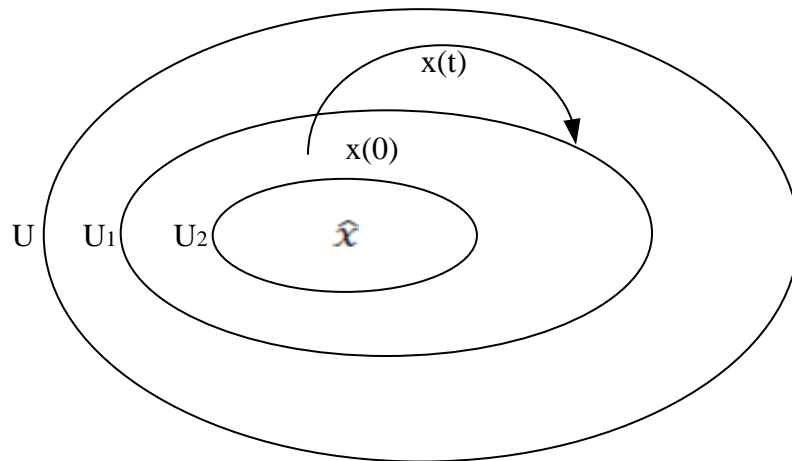
**Definición 2.1.** Un punto  $\hat{x} \in W$ , se dice que es un punto de equilibrio de (2.1) si  $F(\hat{x}) = 0$ .

**Definición 2.2.** Un punto de equilibrio  $\hat{x}$  del sistema autónomo no lineal es estable, cuando para toda vecindad  $U$  de  $\hat{x}$  en  $W$  existe una vecindad  $U_1$  de  $\hat{x}$  tal que toda solución  $x(t)$  de (2.1) con  $x(0) \in U_1$  está definida en  $U$  para todo  $t > 0$  (Figura 2).



**Figura 2.** Punto de equilibrio estable  
Fuente: Elaboración propia

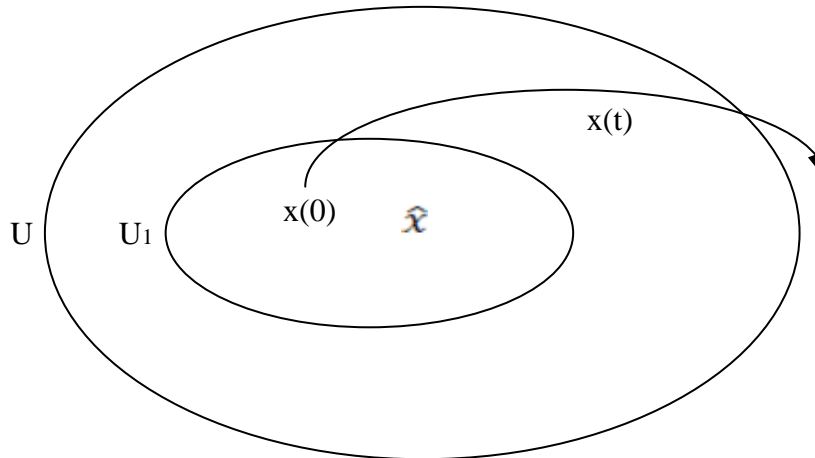
**Definición 2.3.** Un punto de equilibrio  $\hat{x}$  es asintóticamente estable si  $\hat{x}$  es estable y  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{x}$  (Figura 3).



**Figura 3.** Punto de equilibrio asintóticamente estable  
Fuente: Elaboración propia

**Definición 2.4.** Un punto de equilibrio  $\hat{x}$  que no es estable se llama inestable.

Esto significa que existe una vecindad  $U$  de  $\hat{x}$  tal que para toda vecindad  $U_1$  de  $\hat{x}$  en  $U$ , existe al menos una solución  $x(t)$  que comienza en  $x(0) \in U_1$  y que no permanece enteramente en  $U$  (Figura 4).



**Figura 4.** Punto de equilibrio inestable  
Fuente: Elaboración propia

### 2.3. Marco conceptual

#### Definición 2.5.

Sea  $V: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable definida en una vecindad  $U \subset W$  de  $\hat{x}$ .

Denotemos por  $\dot{V}: U \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por:

$$\dot{V}(x) = DV(x) (F(x))$$

$$\dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial X_i} F_i$$

Entonces, si  $x(t)$  es la curva solución de (2.1) que satisface la condición  $x(0) = x$ ,

$$\dot{V}(x) = \left. \frac{d}{dt} V(x(t)) \right|_{t=0}$$

por la regla de la cadena.

#### Definición 2.6.

Sea  $\hat{x} \in W$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = F(x)$ . Una función multivariable es una función  $V: U(\hat{x}) \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciable definida en una vecindad  $U$  de  $\hat{x}$ , que satisface las siguientes condiciones:

$$(a) \quad V(\hat{x}) = 0, \quad V(x) > 0 \quad \forall x \neq \hat{x};$$

(b)  $\dot{V}(\hat{x}) \leq 0$ , en  $U(\hat{x})$ .

Además una función multivariable es estricta si:

(c)  $\dot{V} < 0$ , en  $U(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}$ .

## **CAPÍTULO III**

### **MÉTODO**

#### **3.1. Tipo de la investigación.**

El tipo de investigación de la tesis, fue no experimental para la obtención de funciones multivariadas para el estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, corresponde a una investigación de las ciencias formales, que haciendo uso del método axiomático nos llevará a la búsqueda de nuevos conocimientos en la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal.

#### **3.2. Diseño de investigación.**

El diseño de investigación es descriptivo, según Epp (2011) señala que un argumento es una sucesión de sentencias y una forma de argumento es una sucesión de sentencias. Todas las declaraciones en un argumento y todas las formas de declaración en una forma de argumento, excepto la final, se llaman premisas (o suposiciones o hipótesis). La declaración final o formulario de declaración se llama la conclusión. El símbolo  $\therefore$ , que se lee "por lo tanto", normalmente se coloca justo antes de la conclusión. Decir que una forma de argumento es válida significa que no importa qué declaraciones particulares se sustituyan por las variables de

declaración en sus premisas, si las premisas resultantes son todas verdaderas, entonces la conclusión también es cierta. Decir que un argumento es válido significa que su forma es válida. Una forma de argumento que consta de dos premisas y una conclusión se denomina silogismo. La primera y la segunda premisa se denominan premisa mayor y premisa menor, respectivamente. La forma más famosa de silogismo en lógica se llama modus ponens. Tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{l} \text{Si } p \text{ entonces } q \\ p \\ \therefore q \end{array}$$

El término modus ponens significa en latín "método de afirmación" (la conclusión es una afirmación).

### **3.2.1. Método de estudio**

Se empleó en el desarrollo de la investigación el método axiomático que es la base de la construcción de cualquier disciplina matemática, estableciéndose un conjunto de reglas de razonamiento, enunciados y postulados a partir de los cuales por reglas de inferencia del sistema axiomático se derivan otros enunciados o proposiciones que se denominan teoremas.

### **3.2.2. Procedimiento del método axiomático**

#### **Hipótesis:**

Es una presuposición que partiendo de varias premisas infiere una conclusión sobre la existencia de un objeto o de una causa de algún fenómeno.

#### **Tesis:**

Es la elaboración de una concepción científica de la práctica y por ello requiere ser demostrada.



### 3.3. Población y muestra

#### 3.3.1. Población en las ciencias formales

La población estuvo representada por once ( $N=11$ ) casos particulares de funciones multivariadas lineales y no lineales, de sistemas autónomos, para el estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio; distribuidas en la tabla 1.

**Tabla 1**  
*Población*

Estabilidad	Estabilidad asintótica	Total N
6	5	11

Fuente: Elaboración propia

#### 3.3.2. Muestra

La muestra ( $n$ ) son las once funciones multivariadas igual que la población, debido a su número pequeño y considerando que; según Kinnear y Taylor (1998) señala que el muestreo por prorrato son muestras intencionales en donde el investigador emprende pasos explícitos para obtener una muestra que sea similar a la población.

### 3.4. Técnicas e instrumentos de recolección de datos

#### 3.4.1. Técnicas

##### a) Procedimiento: Observación

**Acciones:** Se eligió un conjunto de funciones multivariadas para luego ser planteados en busca de una solución.

##### b) Procedimiento: Experimentación

**Acciones:** Se analizó las proposiciones matemáticas de la teoría de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrios de los

sistemas autónomos no lineales. Asimismo, se evaluaron las proposiciones de las funciones multivariantes

**c) Procedimientos: Inducción**

**Acciones:** Se fijaron las reglas de deducción y de la definición de la teoría de la estabilidad. Asimismo, se pasa de una proposición a otras y se introduce nuevos términos y proposiciones.

**d) Procedimientos: Analogías**

**Acciones:** Se compararon las proposiciones previas con las nuevas.

**e) Procedimientos: Generalización**

**Acciones:** Se generalizó algunas proposiciones, teoremas, en base a las reglas de deducción y definición.

(Guardales, 2004)

**3.4.2. Instrumentos**

**Teoría axiomática**

**Definición:** Es una determinación lógica que establece los signos diferenciales de un objeto, concepto o contenido.

**Teorema:** Son propiedades que se deducen de los axiomas anexados al sistema axiomático, cuyas leyes son demostrables.

**Corolario:** Son propiedades que se deducen de un teorema.

**Lema:** Es una proposición que se deducen de los axiomas anexados al sistema axiomático cuyas leyes son demostrables.

**Proposición:** Es un enunciado que debe ser verdadero o falso pero que no pueda ser ambas a la vez.

(Guardales, 2004)

### 3.5. Técnicas de procesamiento y análisis de datos

En la lógica matemática, partiendo de ciertas hipótesis o premisas se formulan tesis y luego se demuestran, los llamados teoremas y toman la forma  $(A \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow B$ , la cual es la regla que nos da pase a inferencia modus ponens.

Se entiende por demostración del enunciado B a una cadena de transformaciones ejecutadas en virtud de reglas lógicamente validas, que partiendo de un enunciado verdadero A o suponiéndolo verdadero se concluye B.

#### a) Demostración directa

En la demostración directa se parte de un enunciado verdadero A y de ahí se concluye en el enunciado B. La conclusión B es también verdadera, ya que de una premisa verdadera solo se puede seguir un enunciado verdadero.

#### b) Demostración por inducción completa

Esta demostración consiste, en que se demuestra que el enunciado se cumple para un número natural inicial. Se acepta que se cumple para un numero k. Luego se muestra que se cumple para k+1. Se concluye que el enunciado se cumple para todos los números naturales.

**CAPÍTULO IV**  
**PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS**

**4.1. Presentación de resultados por variables**

**4.1.1.** Para el siguiente sistema autónomo no lineal en  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^2y \\ \dot{y} = -y + y^2x \end{cases}$$

el punto de equilibrio (0,0) es asintóticamente estable para el sistema en estudio.

**4.1.2.** Sea la función definida por

$$V(y) = \int_0^{\infty} \|X(t, Y)\|^2 dt. \quad (2.4)$$

Si la integral es convergente entonces  $V = V(Y)$  es una función multivariable para el sistema  $\dot{x} = A(x)$ , donde todos los valores propios de  $A$  tienen partes reales negativas.

**4.1.3.** Si  $F$  es una función de clase  $C^1$  en una vecindad  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen, y además satisface lo siguiente:

(a)  $F(0) = 0$ , y

(b) Las partes reales de los valores propios de la matriz jacobiana  $J$  de  $F$ , evaluadas en el origen; son negativas. Entonces la función multivariable  $V = V(x)$  para el sistema lineal de coeficientes constantes  $\dot{x} = Jx$  es también una función multivariable para el sistema (no lineal)  $\dot{x} = F(x)$ .

**4.1.4.** Consideramos una masa constante  $m$  que se mueve bajo la influencia de un campo conservativo  $-\text{grad } \Phi(x)$  definido por una función potencial  $\Phi: W_0 \rightarrow \mathbb{R}$  en un conjunto abierto  $W_0 \subset \mathbb{R}^3$ . Un punto de equilibrio  $(\hat{x}, 0)$  de un campo de fuerzas conservativas es estable si la energía potencial tiene en  $\hat{x}$  un mínimo local estricto.

**4.1.5.** Consideremos un péndulo que se mueve en un plano vertical, suponemos una fuerza gravitatoria constante igual a la masa  $m$  de péndulo; despreciamos la masa de la varilla que lo soporta y suponemos que existe una fuerza de rozamiento (o de viscosidad) que se opone al movimiento, proporcional a la velocidad del péndulo. Entonces la función multivariable del fenómeno físico se representa mediante la energía total

$$E(x,y) = mL \left( \frac{1}{2} Ly^2 + 1 - \cos x \right).$$

**4.1.6.** Consideremos el circuito eléctrico simple que consiste de una inductancia  $L$ , un condensador  $C$  y una resistencia  $R$ . Entonces la función multivariable del circuito eléctrico simple se representa mediante la energía total

$$E(x,y) = \frac{1}{2c} (Lcy + x^2).$$

#### **4.1.1. Problemática de la asignatura ecuaciones diferenciales aplicadas en la Escuela de Física Aplicada-UNJBG.**

Diecisiete estudiantes del segundo año de la Escuela Profesional de Física Aplicada del Departamento de Física, de la Facultad de Ciencias de la UNJBG participaron en un experimento preparado para evaluar la efectividad de la didáctica para la obtención de funciones multivariantes en el estudio generalizado de la estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no Lineal, los alumnos desarrollaron un cuestionario con preguntas de la estabilidad y estabilidad asintótica, y después resolvieron un cuestionario con la didáctica del docente. ¿Proporcionan estos datos suficientes evidencias para indicar que la didáctica empleada por el docente es efectiva a un nivel de una significancia del 0,05?

#### **4.2. Contratación de hipótesis**

Para contrastar la hipótesis matemática se empleó en el desarrollo de la investigación el método axiomático que es la base de la construcción de cualquier disciplina matemática, estableciéndose un conjunto de reglas de razonamiento, de enunciados, postulados a partir de los cuales y por reglas de inferencia del sistema se derivan otros enunciados o proposiciones que llamaremos teoremas.

Así mismo los métodos lógicos: inductivo y deductivo respectivamente. El método deductivo es utilizado para justificar matemáticamente las condiciones suficientes de la estabilidad y estabilidad asintótica, y el método inductivo es para contrastar el funcionamiento de dichas condiciones utilizando ejemplos como la ecuación de Van der Pol.

### 4.3. Discusión de resultados

#### 4.3.1. Estabilidad y Estabilidad asintótica

**Teorema 4.1.** Sea  $\hat{x} \in W$  un punto de equilibrio de  $\dot{x} = F(x)$ .

Sea  $V: U(\hat{x}) \rightarrow \mathbb{R}$ , una función diferenciable definida en una vecindad  $U(\hat{x}) \subset W$  tal que:

- (a) Si  $V$  es una función multivariable para  $\hat{x}$ , entonces  $\hat{x}$  es estable.
- (b) Si  $V$  es una función multivariable estricta para  $\hat{x}$ , entonces  $\hat{x}$  es asintóticamente estable.

**Prueba:**

- (a) Sea  $V: U(\hat{x}) \rightarrow \mathbb{R}$  una función multivariable para  $\hat{x}$  y  $r > 0$  lo suficientemente pequeño para que la bola  $B_r(\hat{x}) \subset U(\hat{x})$ , donde;

$$B_r(\hat{x}) = \{x \in U(\hat{x}) / \|x - \hat{x}\| \leq r\}$$

Denotemos por  $W_0$  esta bola  $B_r(\hat{x})$ .

Sea  $\alpha = \min\{V(x), x \in \partial B_r(\hat{x})\}$ , es decir, sobre la superficie esférica  $S_r(\hat{x})$  de radio  $r$  centro  $\hat{x}$ .

Entonces  $\alpha > 0$  por la definición (2.6) parte (a).

Como  $V$  es una función continua en  $\hat{x} \in W_0$  y  $\alpha > 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  que satisface

$$\delta < r \quad \text{tal que} \quad V(x) < \alpha \quad \forall x \in B_\delta(\hat{x}) = U_1(\hat{x})$$

En efecto, siendo  $\alpha > 0$ , tomamos  $\varepsilon = \alpha > 0$ .

Por la definición de función continua a este  $\varepsilon$  le corresponde un  $\delta > 0$  tal que

$$|x - \hat{x}| < \delta \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < V(x) < \varepsilon$$

Pero  $\varepsilon = \alpha$ ; luego todo punto  $x \in W_0$  cuya distancia al punto  $\hat{x}$  sea menor que  $\varepsilon$  cumple  $V(x) < \alpha$ .

### **Afirmación**

“Toda solución  $x(t)$  de (2.1) que comienza con  $x \in U_1(\hat{x})$  permanece en  $B_r(\hat{x})$  para  $t > 0$ ”.

Supongamos que existe  $t_1 > 0$  tal que  $|x(t_1)| = r$ ; donde  $V(x(t_1)) \geq \alpha$ .

Pero por hipótesis tenemos que  $V$  es una función no creciente a lo largo de cualquier movimiento, e.i.

$$V(x) = V(x(0)) \geq V(x(t_1)),$$

entonces resulta la contradicción

$$V(x) \geq \alpha$$

Esto prueba que  $\hat{x}$  es un punto de equilibrio estable.

(b) Demostraremos la parte que concierne a estabilidad asintótica. En efecto:

Supongamos ahora que  $V$  es, en  $U(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}$ , estrictamente decreciente sobre las órbitas, debemos probar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{x} \quad \forall x \in U_1(\hat{x})$$

Sea  $x(t)$  una solución que comienza en  $x \in U_1(\hat{x}) \setminus \{\hat{x}\}$  y consideremos  $(t_n) \subset \mathbb{R}^+$  una sucesión creciente tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = z_0$$

Afirmamos que  $\hat{x} = z_0$ . Para verlo observamos que:

Por la continuidad de  $V$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(x(t_n)) = V(z_0)$$



y como  $V(x(t))$  decrece, entonces

$$V(z_0) < V(x(t)) \quad \forall t \geq 0$$

Supongamos  $\hat{x} \neq z_0$ .

Sea  $z(t)$  la solución que comienza en  $z_0$ .

Para cualquier  $s > 0$ , se tiene  $V(z(s)) < V(z(0)) = V(z_0)$ .

Entonces para toda solución  $y(s)$  que comienza suficientemente cerca de  $z_0$  se tiene:

$$V(y(s)) < V(z_0);$$

Haciendo  $y(0) = x(t_n)$  resulta la contradicción

$$V(x(t_n + s)) < V(z_0).$$

Por lo tanto  $z_0 = \hat{x}$ .

Esto prueba que  $\hat{x}$  es el único punto de acumulación posible del conjunto  $\{x(t) / t > 0\}$

### **Ejemplo 1.**

Sea el sistema autónomo en  $\mathbb{R}^2$  descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases}$$

es evidente que  $(0,0)$  es el único punto de equilibrio.

Como función para este punto ensayamos

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Ahora tenemos que verificar las condiciones de la definición (2.6), y seguidamente aplicar el teorema (4.1). En efecto

(a)  $V(0,0) = 0$  y  $V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$

$$(c) \dot{V}(x, y) = \frac{1}{2} (2x\dot{x} + 2y\dot{y}) = -(x^2 + y^2) + (x^2y + xy^2).$$

Observemos ahora lo siguiente:

Si  $x < 1$  e  $y \neq 0$ , entonces  $xy^2 < y^2$ , mientras que

si  $y < 1$  e  $x \neq 0$ , entonces  $x^2y < x^2$ . Por tanto,

si  $x < 1$ ,  $y < 1$  e  $(x, y) \neq (0, 0)$  entonces  $x^2y + xy^2 < x^2 + y^2$ ,

en consecuencia,  $-(x^2 + y^2) + (x^2y + xy^2) < 0$ . De donde

$$\dot{V}(x, y) < 0 \text{ en } U(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 1, y < 1\} \setminus \{(0, 0)\}, \text{ y}$$

$$\dot{V}(x, y) \leq 0 \text{ en } U(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < 1, y < 1\}.$$

Luego  $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$  es una función multivariable y por el Teorema (4.1) el origen es

estable. Además es asintóticamente estable ya que esa función multivariable es estricta.

### Ejemplo 2.

El origen  $(0, 0)$  es asintóticamente estable para el sistema autónomo en  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + x^2y \\ \dot{y} = -y + y^2x \end{cases}$$

En efecto

$$V(x, y) = x^2 + y^2,$$

es una función multivariable para el origen, es decir cumple las condiciones (a) y

(b) de la definición (2.6)

$$(a) V(0, 0) = 0, \quad V(x, y) > 0, \quad \forall (x, y) \neq (0, 0),$$

$$(b) \dot{V}(x, y) = (2x\dot{x} + 2y\dot{y}) = (x^2 + y^2)(xy - 1)$$

$$\text{De donde } \dot{V}(x, y) \leq 0 \text{ en } U(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy < 1\}$$

Por el teorema (4.1) parte (a), el origen es estable.

Además la función multivariable es estricta:

$$(c) \dot{V}(x, y) < 0 \text{ en } (0,0) \setminus \{(0,0)\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / xy < 1\} \setminus \{(0,0)\}.$$

Por el teorema (4.1) parte (b), el origen (0,0) es asintóticamente estable.

### Ejemplo 3.

Sea la ecuación de Van der Pol

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (\varepsilon < 0).$$

La ecuación equivalente en términos de x,y es

$$\begin{cases} \dot{x} = y - \varepsilon\left(\frac{x^3}{3} - x\right) \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

El análisis de este sistema no lineal comienza por los puntos de equilibrio  $\hat{x} = (0,0)$ .

Ahora tomemos la función

$$V(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

para este punto de equilibrio, mostraremos que la función así construida satisface las condiciones de la definición (2.6) y los requerimientos del teorema (4.1).

En efecto:

$$(a) V(0,0) = 0 \text{ y } V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$(b) \dot{V}(x, y) = (x\dot{x} + y\dot{y}) = -\varepsilon x^2 \left(\frac{x^2}{3} - 1\right)$$

Es evidente que

$$\dot{V}(x, y) \leq 0 \text{ en } U(0,0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 3\}.$$

Por el teorema (4.1) parte (a), el origen (0,0) es estable.

#### Ejemplo 4.

Consideremos el sistema autónomo no lineal en  $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} \dot{x} = -y^3 \\ \dot{y} = x^3 \end{cases}$$

El origen  $\hat{x} = (0,0)$  es un punto de equilibrio de este sistema y  $V(x,y) = x^4 + y^4$ , es una función multivariable para el origen del sistema autónomo no lineal.

En efecto:

$$\dot{V}(x,y) = 4x^3\dot{x} + 4y^3\dot{y} = 0$$

por lo tanto la curva solución está situado sobre las curvas cerradas

$$x^4 + y^4 = c,$$

el cual rodea el origen.

En virtud del teorema (4.1), el origen es un punto de equilibrio estable de este sistema el que no es asintóticamente estable.

Note que  $DF(0) = 0$  para este ejemplo, es decir,  $DF(0)$  tiene dos autovalores ceros.

#### Ejemplo 5.

Consideremos el sistema dinámico en  $\mathbb{R}^2$  descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\begin{cases} \dot{x} = -4y - x^3 \\ \dot{y} = 3x - y^3 \end{cases}$$

El único punto de equilibrio es el origen; investiguemos su estabilidad. La parte lineal del sistema en  $(0,0)$  es

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego existen dos autovalores imaginarios puros ( $\lambda = \pm 2\sqrt{3}i$ ).

Todo lo que podemos concluir es que el origen no es asintóticamente estable.

Busquemos una función multivariable para (0,0) de la forma:

$$V(x, y) = ax^2 + by^2, \{a, b\} \subset < 0, \infty >$$

$$\dot{V}(x, y) = 2ax\dot{x} + 2by\dot{y}$$

$$\dot{V}(x, y) = -8axy - 2ax^4 + 6byx - 2by^4$$

Deseamos que  $\dot{V} \leq 0$  en una vecindad de  $U(0,0)$ ; esto se puede conseguir poniendo  $a=3$  y  $b=4$ .

Así  $V(x, y) = 3x^2 + 4y^2$  es una función multivariable y, el origen es estable.

Además es asintóticamente estable ya que esa función multivariable es estricta.

### **Observación 3.1**

Si  $\dot{V}(x)$  es negativa en una vecindad, entonces  $V$  decrece a lo largo de la solución de (2.1) que pasa por  $x$ . Es decir una partícula que se mueve a lo largo de cualquiera de las trayectorias definidas por el sistema  $\dot{x} = F(x)$ , estará disipando energía cuando intercepta la superficie  $V(x) = \alpha$ .

Por consiguiente, una partícula que entra en la vecindad rodeada por dicha superficie nunca puede reunir la energía para escapar, y su trayectoria debe permanecer en esa vecindad. Esto claramente implica que el punto de equilibrio será estable, e incluso asintóticamente estable para el sistema dado.

La definición de estabilidad asintótica dada anteriormente en cierto modo es local, deja la posibilidad de que puedan existir soluciones  $x(t)$  de modo que,  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \hat{x}$ ; esto origina la siguiente definición.

**Definición 4.1**

Sea  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una aplicación de clase  $C^1$  tal que  $F(0) = 0$ . El punto de equilibrio  $\hat{x} = 0 \in \mathbb{R}^n$  es globalmente estable, cuando fuera estable y  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  para toda solución  $x(t)$  de  $\dot{x} = F(x)$ .

Sea  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función multivariable estricta para  $\dot{x} = F(x)$  en  $\hat{x}$ .

Supongamos que para cada  $C > 0$  dado exista  $R > 0$  tal que  $\|x\| > R$ , implica  $V(x) > C \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ .

Entonces  $\hat{x} = 0$  es globalmente estable.

**4.3.2. Funciones multivariables en sistemas lineales**

Comenzamos esta sección construyendo una función para el sistema autónomo lineal con eficientes constantes

$$\dot{x} = Ax, \tag{4.1}$$

donde  $A$  es una matriz  $n \times n$  y todos los valores propios de  $A$  tienen real negativa.

La razón para emprender esta construcción es que permitirá extendernos a sistemas no lineales. Denotemos por  $e_1, \dots, e_n$  a los vectores de la base canónica en  $\mathbb{R}^n$  y denotemos por

$$x_i(t) = x_i(t, e_i) = (x_{i1}(t), \dots, x_{in}(t))$$

para cada  $i, 1 \leq i \leq n$  a la solución de (4.1) que satisface la condición inicial  $x_i(0) = e_i$ .

Sea  $Y = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$  en cualquier vector en  $\mathbb{R}^n$ , entonces la función

$$X(t,y) = y_1 x_1(t) + \dots + y_n x_n(t) = \sum_{i=1}^n y_i x_i(t)$$

es la solución de (4.1) que satisface la condición inicial  $x(0) = y$ .

### Teorema 4.2

Sea la función definida por

$$V(y) = \int_0^{\infty} \|X(t, Y)\|^2 dt. \quad (4.2)$$

Si la integral es convergente entonces  $V = V(Y)$  es una función multivariable para el sistema  $\dot{x} = Ax$ , donde todos los valores propios de  $A$  tienen partes reales negativas.

#### Prueba:

Primeramente observamos que si esta integral converge entonces

$$(a) V(Y) \geq 0 \quad \forall Y \text{ en } \mathbb{R}^n,$$

$$V(Y) = 0 \quad \text{si y sólo si} \quad Y = 0.$$

Por otra parte sabemos que

$$X(t, Y) = \sum_{i=1}^n y_i x_i(t)$$

entonces en (4.2) tenemos

$$\begin{aligned} V(y) &= \int_0^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^n y_i x_i(t) \right\|^2 dt = \int_0^{\infty} \left\| \left( \sum_{i=1}^n y_i (x_{i1}, \dots, x_{in}(t)) \right) \right\|^2 dt \\ &= \int_0^{\infty} \left\| \left( \sum_{i=1}^n y_i x_{i1}(t), \dots, \sum_{i=1}^n y_i x_{in}(t) \right) \right\|^2 dt \end{aligned}$$

Pero,

$$\begin{aligned} \left\| \left( \sum_{i=1}^n y_i x_{i1}(t), \dots, \sum_{i=1}^n y_i x_{in}(t) \right) \right\|^2 &= \left( \sum_{i=1}^n y_i x_{i1}(t) \right)^2 + \dots + \left( \sum_{i=1}^n y_i x_{in}(t) \right)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n y_i x_{ik}(t) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^n \left[ \left( \sum_{i=1}^n y_i x_{ik}(t) \right) \left( \sum_{j=1}^n y_j x_{jk}(t) \right) \right] \\
&= \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \left[ \sum_{k=1}^n x_{ik}(t) x_{jk}(t) \right]
\end{aligned}$$

De donde

$$V(Y) = \sum_{i,j=1}^n y_i y_j \int_0^{\infty} \left[ \sum_{k=1}^n x_{ik}(t) x_{jk}(t) \right] dt.$$

Esta función se encuentra bien definida, pues las integrales dadas en esta expresión son convergentes teniendo en cuenta la hipótesis de que los valores propios de  $A$  tienen partes reales negativas.

Demostraremos ahora que  $V$  es una función multivariable para  $\dot{x} = Ax$ . Como se vio anteriormente  $V$  satisface la condición (a) de la definición (2.6), falta ver que cumpla la condición (b) y (c) de la misma definición.

En efecto, sea  $X(t, x_0)$  una solución  $\dot{x} = Ax$  que satisface la condición inicial  $x(0) = x_0$ . Entonces en (4.2) tenemos:

$$V(X(t, x_0)) = \int_0^{\infty} \|X(s, X(t, x_0))\|^2 ds = \int_0^{\infty} \|X(s+t, x_0)\|^2 ds \quad (4.3)$$

Hagamos un cambio de variable en (4.3).

$$\text{Sea :} \quad u = s + t \Rightarrow du = ds$$

$$0 \leq s \leq \infty \Rightarrow t \leq s + t = u \leq \infty$$

Así, tenemos

$$V(X(t, x_0)) = \int_t^{\infty} \|X(u, x_0)\|^2 du.$$

De aquí se tiene



$$\dot{V}(X(t, x_0)) = \frac{d}{dt} \int_t^{\infty} \|X(u, x_0)\|^2 du.$$

$$\dot{V}(X(t, x_0)) = - \|X(t, x_0)\|^2. \quad (4.4)$$

Así  $\dot{V} \leq 0$  en  $\mathbb{R}^n$ ,

además cumple la condición (c) e.i.  $\dot{V} < 0$  en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ .

Entonces  $V$  es una función multivariable para el sistema  $\dot{x} = Ax$  y por el teorema (4.1), el origen es un punto de estabilidad asintótica para el sistema

### Ejemplo 6.

El sistema de primer orden

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x - y \\ \dot{y} = 2x - 5y \end{cases} \quad (4.5)$$

Tiene como matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Y los valores propios son  $-3$  y  $-4$ .

Entonces el nuevo sistema autónomo es

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = -3\bar{x} \\ \dot{\bar{y}} = -4\bar{y} \end{cases}$$

Luego las soluciones son:

$$X_1(t, e_1) = (e^{-3t}, 0) \text{ tal que } X_1(0) = e_1$$

$$X_2(t, e_2) = (0, e^{-4t}), \text{ tal que } X_2(0) = e_2$$

Sea ahora  $Y = xe_1 + ye_2$ , un vector de  $\mathbb{R}^2$ , entonces:

$$V(x, y) = \int_0^{\infty} \|X(t, Y)\|^2 dt = \int_0^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^2 x_i y_i(t) \right\|^2 dt.$$

$$V(x,y) = \int_0^{\infty} \left\| x(e^{-3t}, 0) + y(0, e^{-4t}) \right\|^2 dt = \int_0^{\infty} (x^2 e^{-6t} + y^2 e^{-8t}) dt$$

$$V(x,y) = x^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-6t} dt + y^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-8t} dt$$

$$V(x,y) = \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{8}.$$

Por el Teorema (4.2),  $V(x,y)$  así definida es una función multivariable para el sistema autónomo lineal (4.5) en el punto  $(0,0)$ .

En efecto:

$$(a) \quad V(0,0) = 0, \quad V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$$

$$(b) \quad \dot{V}(x,y) = \frac{1}{3}x\dot{x} + \frac{1}{4}y\dot{y} = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{6}xy - \frac{5}{4}y^2 \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^2$$

$$(c) \quad \dot{V}(x,y) < 0, \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

### Ejemplo 7.

Sea el sistema autónomo lineal en  $\mathbb{R}^3$ , descrito por

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z \\ \dot{y} = -2y \\ \dot{z} = -3z \end{cases} \quad (4.6)$$

El sistema tiene como matriz de coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

y los valores propios  $\lambda_1 = -1$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $\lambda_3 = -3$ .

Entonces el nuevo sistema autónomo es:

$$\begin{cases} \bar{\dot{x}} = -\bar{x} \\ \bar{\dot{y}} = -2\bar{y} \\ \bar{\dot{z}} = -3\bar{z} \end{cases}$$

Luego las soluciones:

$$X_1(t, e_1) = e^{-t}e_1, \quad \text{tal que } X_1(0) = e_1$$

$$X_2(t, e_2) = e^{-2t}e_2, \quad \text{tal que } X_2(0) = e_2$$

$$X_3(t, e_3) = e^{-3t}e_3, \quad \text{tal que } X_3(0) = e_3.$$

Si  $Y = xe_1 + ye_2 + ze_3$  es un vector de  $\mathbb{R}^3$ , entonces

$$V(x, y, z) = \int_0^{\infty} \left\| X(t, Y) \right\|^2 dt = \int_0^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^3 y_i X_i(t) \right\|^2 dt$$

$$V(x, y, z) = \int_0^{\infty} \left\| xe^{-t}e_1 + ye^{-2t}e_2 + ze^{-3t}e_3 \right\|^2 dt$$

$$V(x, y, z) = \int_0^{\infty} (x^2e^{-2t} + y^2e^{-4t} + z^2e^{-6t}) dt$$

$$V(x, y, z) = x^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2t} dt + y^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-4t} dt + z^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-6t} dt$$

$$V(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{6}$$

Por el Teorema (4.2), podemos afirmar que ésta función verifica las condiciones de la definición (2.6), y  $V(x, y, z)$  así definida, es una función multivariable para el sistema lineal(4.6) en el punto  $(0, 0, 0)$ .

En efecto:

$$(a) \quad V(0, 0, 0) = 0, V(x, y, z) > 0 \quad \forall (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

$$(b) \quad \dot{V}(x, y, z) = x\dot{x} + \frac{1}{2}y\dot{y} + \frac{1}{3}z\dot{z} = -x^2 - y^2 - z^2 + xy + xz \leq 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3$$

$$(c) \quad \dot{V}(x, y, z) < 0 \quad \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}.$$

Por consiguiente  $V$  es una función multivariable para el punto  $\hat{x} = (0, 0, 0)$ .

### 4.3.3. Funciones multivariables para sistemas no lineales

Sea el sistema autónomo no lineal descrito por

$$\dot{x} = F(x)$$

De acuerdo a la sección anterior; siempre que  $F$  sea de clase  $C^1$  en una vecindad  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen y que tome valores en  $\mathbb{R}^n$ , entonces esta función se puede reemplazar por otra de la forma

$$F(x) = Jx + G(x),$$

donde  $J$  es la matriz Jacobiana y  $G(x)$  es pequeña respecto a  $Jx$  cuando  $\|x\|$  es pequeña. Ahora aplicamos éstos resultados a la construcción anterior, para obtener funciones multivariables para sistemas no lineales en la siguiente proposición.

#### Teorema 4.8

Si  $F$  es una función de clase  $C^1$  en una vecindad  $U$  de  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen, y además satisface lo siguiente:

- (a)  $F(0) = 0$ , y
- (b) Las partes reales de los valores propios de la matriz jacobiana  $J$  de  $F$ , evaluadas en el origen; son negativas. Entonces la función multivariable  $V = V(x)$  para el sistema lineal de coeficientes constantes  $\dot{x} = Jx$  es también una función multivariable para el sistema (no lineal)  $\dot{x} = F(x)$ .

#### Prueba:

En efecto, por (4.3) sabemos que

$$\dot{V}(x) \leq -\|x\|^2$$

Pero

$$\dot{V}(x) = \text{grad } V(x) \cdot F(x) = \text{grad } V(x) \cdot (Jx)$$

De donde

$$\dot{V}(x) = \text{grad } V(x) \cdot (Jx) \leq -\|x\|^2$$

Luego

$$\dot{V}(x) = \text{grad } V(x) \cdot F(x) = \text{grad } V(x) \cdot (Jx + G(x))$$

$$\dot{V}(x) = -\|x\|^2 + \|\text{grad } V(x)\| \|G(x)\|$$

Pero

$$\text{grad } V(x) = 2Jx \text{ y } \|Jx\| \leq k\|x\| \text{ para alguna constante } k \text{ y todo } x \text{ de } \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto,

$$\|\text{grad } V(x)\| \leq 2K\|x\| \text{ y } \text{grad } V(x) \cdot F(x) \leq -\|x\|^2 + 2k\|x\| \|G(x)\|.$$

Utilizaremos ahora el hecho de que

$$\lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{F(x) - Jx}{\|x\|} = \lim_{\|x\| \rightarrow 0} \frac{G(x)}{\|x\|} = 0,$$

para encontrar una esfera  $S_r$  de radio  $r$  y centro en el origen de  $\mathbb{R}^n$

tal que

$$\|G(x)\| \leq \frac{1}{4k}\|x\|$$

para todo  $x$  en la esfera; luego dentro de ésta tenemos

$$\text{grad } V(x) \cdot F(x) \leq -\|x\|^2 + (2k\|x\|) \left( \frac{1}{4k}\|x\| \right) = \frac{-1}{2}\|x\|^2.$$

Por tanto

$\dot{V}(x) \leq 0$  en  $\mathbb{R}^n$  que contiene al origen, y por lo tanto  $V$  es ciertamente una función multivariable para el sistema (no lineal)  $\dot{x} = F(x)$ .

### Ejemplo 9.

Consideremos el sistema autónomo no lineal.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y^2 \\ \dot{y} = -y + x^2 \end{cases} \quad (2.10)$$

El único punto de equilibrio es el origen  $\hat{x} = (0,0)$ . Ahora linealizamos el sistema no lineal, usando la aproximación lineal de F; haciendo:

$$F_1 = -x + y^2$$

$$F_2 = -y + x^2$$

Entonces

$$J = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{array} \right]_{\hat{x}=(0,0)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luego de esto resulta un sistema lineal de coeficientes constantes  $\dot{x} = Jx$  e.i.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

y los valores propios es  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ . En este caso, las soluciones  $X_1(t)$  y  $X_2(t)$  tales que  $X_1(0) = e_1$  y  $X_2(0) = e_2$  son:

$$X_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$$

Sea  $y = xe_1 + e_2$  un vector de  $\mathbb{R}^2$  entonces

$$V(x,y) = \int_0^{\infty} \|x(e^{-t}, 0) + y(0, e^{-t})\|^2 dt = \int_0^{\infty} (x^2 e^{-2t} + y^2 e^{-2t}) dt$$

$$V(x,y) = x^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2t} dt + y^2 \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-2t} dt$$

$$V(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Por el teorema (4.3),  $V(x,y)$  así definida es una función multivariable para el sistema no, lineal (4.7) para  $\dot{x} = (0,0)$ .

#### 4.3.4. Aplicación de la función multivariable en un campo de fuerza conservativo

##### Definición 4.2.

Un campo vectorial  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se dice que es un campo de fuerza si el vector  $F(x)$  asignado al punto  $x$  se interpreta como una fuerza que actúa sobre una partícula colocada en  $x$ .

##### Definición 4.3.

Un campo de fuerzas  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  se dice que es conservativo si existe una función de clase  $C^1$

$$\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$F(x) = \left( \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_3} \right) = -\text{grad } \Phi(x)$$

La función  $\Phi$  se dice que es la energía potencial (Más propiamente,  $\Phi$  es una energía potencial, ya que agregándole una constante no cambia el campo de fuerzas  $-\text{grad } \Phi(x)$ ).

##### Ejemplo 10.

El campo de fuerzas definido por  $F(x) = (-2x_1, -2x_2, -2x_3)$  es un campo conservativo pues existe  $\Phi(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$  tal que  $F = -\nabla \Phi$ .

**Teorema 4.4.** (Conservación de la energía)

Sea  $\mathbf{x}(t)$  la trayectoria de una partícula móvil en un campo de fuerza conservativo

$\mathbf{F} = -\text{grad } \Phi$ . Entonces la energía total  $E$  es independiente del tiempo.

**Prueba:**

$\mathbf{x}(t)$  es la trayectoria de una partícula móvil en un campo de fuerzas conservativo,

entonces la energía total  $E$  es la función del tiempo en valores reales:

$$E(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 + \Phi(\mathbf{x}(t)),$$

donde la energía cinética es

$$T = \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2,$$

y la energía potencial está definida por  $\Phi(\mathbf{x}(t))$ . Hay que probar que  $E(\mathbf{x}(t))$  es

constante respecto a  $t$ , es decir que

$$\frac{d}{dt}(T + \Phi) = 0$$

o equivalentemente,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m |\dot{\mathbf{x}}(t)|^2 + \Phi(\mathbf{x}(t)) \right) = 0$$

Por la fórmula de Leibnitz se tiene que

$$\frac{d}{dt} |\dot{\mathbf{x}}|^2 = 2 \langle \ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}} \rangle$$

y por la regla de la cadena

$$\frac{d}{dt} (\Phi(\mathbf{x}(t))) = \langle \text{grad } \Phi(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle$$

Estos resultados se reducen a probar que



$$m \langle \ddot{\mathbf{x}}(t), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle + \langle \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle = 0$$

es decir,

$$\langle m\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}(t)), \dot{\mathbf{x}}(t) \rangle = 0$$

Por la segunda ley de Newton tenemos

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = m\ddot{\mathbf{x}}(t)$$

Pero:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = -\mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}(t))$$

De donde

$$m\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{grad} \Phi(\mathbf{x}(t)) = 0$$

$$\therefore \frac{dE(\mathbf{x}(t))}{dt} = 0$$

#### Definición 4.4

El espacio de estados es el producto cartesiano  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$  de pares,  $(x,v)$ ,  $x,v$  en  $\mathbb{R}^3$ ;

$x$  es la posición y  $v$  la velocidad que tenga una partícula en una instante dado.

Podemos ahora interpretar la energía como una función en el espacio de estados,

$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por

$$E(x,v) = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 + \Phi(x)$$

#### Teorema 4.5. (Lagrange)

Consideramos una masa constante  $m$  que se mueve bajo la influencia de un campo

conservativo  $-\mathbf{grad} \Phi(x)$  definido por una función potencial  $\Phi: W_0 \rightarrow \mathbb{R}$  en un

conjunto abierto  $W_0 \subset \mathbb{R}^3$ . Un punto de equilibrio  $(\hat{x}, 0)$  de un campo de fuerzas

conservativas es estable si la energía potencial tiene en  $\hat{x}$  un mínimo local estricto.

**Prueba:**

La segunda Ley de Newton establece que

$$F(x) = m\ddot{x} \quad (4.8)$$

La fuerza del campo conservatorio está dado por

$$F(x) = -m \operatorname{grad} \Phi(x).$$

Entonces de (4.8), obtenemos una ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} = -\operatorname{grad} \Phi(x)$$

El correspondiente sistema dinámico en el espacio de estados

$$W = W_0 \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \text{ es, para } (x,v) \in W_0 \times \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v \\ \frac{dv}{dt} = -\operatorname{grad}\Phi(x) \end{cases}$$

Sea  $(\hat{x}, \hat{v}) \in W \times \mathbb{R}^3$  un punto de equilibrio.

Entonces  $\hat{v} = 0$  y  $\operatorname{grad} \Phi(\hat{x}) = 0$ .

Para investigar la estabilidad de  $(\hat{x}, 0)$  tratamos de usar la energía total  $E$ :

$W_0 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , definido por

$$E(x,v) = \frac{1}{2}mv^2 + \Phi(x),$$

Para construir una función multivariable. Puesto que una función multivariable ha de anularse en  $(\hat{x}, 0)$ , sustraemos de  $E(x,v)$  la energía de estado,  $(\hat{x}, 0)$  que es

$\Phi(\hat{x})$ , y definimos  $V: W_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  por

$$V(x,v) = E(x,v) - E(\hat{x},0) = \frac{1}{2}mv^2 + \Phi(x) - \Phi(\hat{x})$$

Mostraremos que  $V$  es una función multivariable para  $(\hat{x}, 0)$ , es decir cumple las condiciones de la definición (2.6).

En efecto:

(a)  $V(\hat{x}, 0) = 0$ . Por hipótesis  $\Phi$  tiene un mínimo local estricto en  $\hat{x}$ , luego existe una vecindad de  $\hat{x}$  tal que  $\Phi(x) > \Phi(\hat{x}) \quad \forall x \neq \hat{x}$ .

La energía cinética  $T = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$ , por lo tanto  $V(x, v) > 0 \quad \forall (x, v) \neq (\hat{x}, 0)$ .

(b) Por la conservación de la energía  $\dot{V}(x, v) = 0$  en una vecindad de  $(\hat{x}, 0)$ .

En virtud del teorema (4.1), el punto de equilibrio  $(\hat{x}, 0)$  es estable.

### Ejemplo 11.

Consideremos la ecuación del oscilador armónico tridimensional

$$\ddot{x} + k^2x = 0 \quad (4.9)$$

El oscilador armónico tridimensional de (4.8) corresponde al campo de fuerzas definido por:

$$F(x) = (-mK^2x_1, -mK^2x_2, -mK^2x_3), \quad (K \neq 0)$$

Este campo es conservativo, con energía potencial

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}mK^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

El único punto de equilibrio de  $\Phi$  es el origen  $\hat{x} = (0, 0, 0)$ .

El Hessiano de  $\Phi$  en el origen es

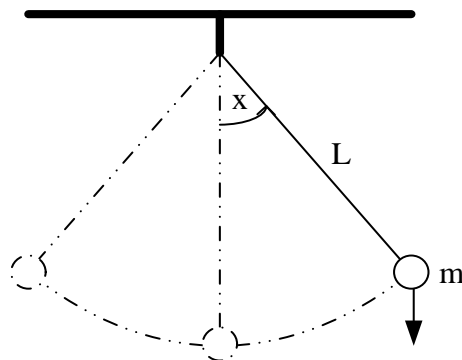
$$H\Phi(0, 0, 0)(h_1, h_2, h_3) = \frac{1}{2}mK^2(h_1^2 + h_2^2 + h_3^2), \text{ que se define positivo.}$$

Se sigue que el origen es un mínimo estricto en  $\Phi$ .

Así por el teorema (4.5) hemos demostrado que el origen es un punto de equilibrio estable.

#### 4.3.5. Aplicación de las funciones multivariables en el movimiento pendular

Consideremos un péndulo que se mueve en un plano vertical (Figura 5), suponemos una fuerza gravitatoria constante igual a la masa  $m$  de péndulo; despreciamos la masa de la varilla que lo soporta y suponemos que existe una fuerza de rozamiento (o de viscosidad) que se opone al movimiento, proporcional a la velocidad del péndulo. Analizar la estabilidad del fenómeno físico que se representan mediante un sistema de ecuaciones diferenciales.



**Figura 5.** Péndulo simple  
Fuente: Elaboración propia

Sea  $L$  la longitud (constante) de la cuerda.

El péndulo se mueve a lo largo de una circunferencia de radio  $L$ . Si  $x(t)$  es el ángulo entre la vertical y la varilla en el instante  $t$ , medida en sentido contrario a las agujas del reloj, entonces la velocidad angular del péndulo es  $\dot{x}(t)$  y la velocidad es  $L\dot{x}(t)$ . Así, la fuerza de rozamiento es  $-k L\dot{x}(t)$ , siendo  $k > 0$ ; esta fuerza es tangente a la circunferencia.

La fuerza gravitatoria  $m$  tiene una componente  $-m \sin x(t)$  tangente a la circunferencia, la cual produce el movimiento del péndulo. Así pues la fuerza total tangente a la circunferencia en el instante  $t$  es  $F$

$$F = -(kL \dot{x}(t) + m \sin x(t))$$

la aceleración del péndulo tangente a la circunferencia es

$$a = L\ddot{x}(t);$$

Entonces, por la segunda Ley de Newton  $F = m a$ , se tiene

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\dot{x} - \frac{1}{L}\sin x$$

Introduciendo una nueva variable

$$y = \dot{x}(t)$$

(Interpretada como velocidad angular) obtenemos el sistema de primer orden equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{L}\sin x - \frac{K}{m}y, \end{cases}$$

Esta ecuación autónoma no lineal en  $\mathbb{R}^2$  tiene como punto de equilibrio  $\hat{x} = (0,0)$ .

Para investigar la estabilidad del punto tratamos de usar la energía total  $E$ , como una función natural para ensayar.

Se tiene:

$$E = T(\text{Energía Cinética}) + \Phi(\text{Energía Potencial});$$

donde la energía cinética es:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(L\dot{x})^2 = \frac{1}{2}mL^2y^2.$$

Para la energía potencial tomamos la masa multiplicada por la altura sobre el punto más bajo de la circunferencia:

$$\Phi = m(L - L \cos x).$$

Así pues la energía total es

$$E(x,y) = \frac{1}{2}mL^2\dot{y}^2 + m(L - L \cos x) = mL \left( \frac{1}{2}Ly^2 + 1 - \cos x \right)$$

Mostraremos que la energía total cumple las condiciones de la definición (2.6) y los requerimientos del teorema (4.1), para el punto de equilibrio  $\hat{x} = (0,0)$ . En efecto:

$$(a) E(0,0) = 0, E(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

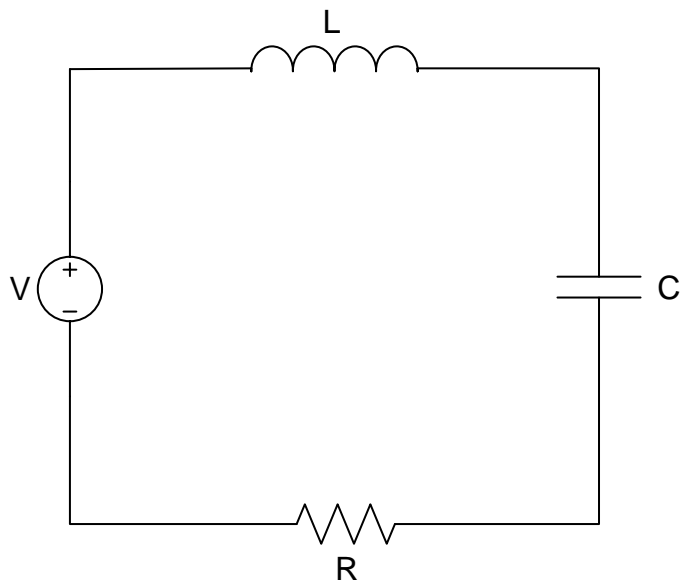
$$(b) \dot{E}(x,y) = mL(Ly\dot{y} + \dot{x} \operatorname{sen} x)$$

$$= mL \left[ Ly \left( \frac{-1}{L} \operatorname{sen} x - \frac{k}{m} y \right) + y \operatorname{sen} x \right]$$

$$= mL \left[ -y \operatorname{sen} x - \frac{LK}{m} y^2 + y \operatorname{sen} x \right] = mL \left[ \frac{-Lky^2}{m} \right]$$

#### 4.3.6. Aplicación de las funciones multivariantes en un circuito eléctrico

Comenzamos por considerar el circuito eléctrico simple que consiste de una inductancia L, un condensador C y una resistencia R (Figura 6)



**Figura 6.** Circuito eléctrico  
Fuente: Elaboración propia

La caída de voltaje a través de la resistencia es  $Ri$ .

La caída de voltaje a través del inductor es  $Ldi/dt$ .

La caída de voltaje a través del condensador es  $x/C$ .

Por lo tanto, por la ley de Kirchhoff,

$$\frac{Ldi}{dt} + Ri + \frac{x}{c} = 0 \quad (3.3)$$

donde  $E = 0$ . Puesto que  $I = dx/dt$ , la ecuación diferencial (3.3) se convierte en

$$L\ddot{x} + R\dot{x} + \frac{x}{c} = 0$$

La cual gobierna el comportamiento de un circuito eléctrico simple RLC. Cuando  $x$  representa la carga sobre el condensador, y  $\dot{x}$  la intensidad de corriente. Introduciendo una nueva variable  $y = \dot{x}$  (Interpretada como intensidad de corriente), obtenemos el sistema de primer orden equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\frac{1}{LC}x - \frac{R}{L}y. \end{cases} \quad (3.4)$$

Esta ecuación autónoma lineal en  $\mathbb{R}^2$  tiene como punto de equilibrio  $\hat{x} = (0,0)$ .

Como función multivariable para este punto de equilibrio ensayamos la energía total E,

E= energía cinética + energía potencial;

$$\text{Energía cinética} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}LY.$$

La energía potencial (o energía almacenada en el condensador) es

$$\int_0^x \frac{x}{c} dx = \frac{1}{2c}x^2$$

Así

$$E(x,y) = \frac{1}{2c}(Lcy+x^2),$$

Es una función multivariable, puesto que satisface la definición (2.6)

En efecto

$$(a) \quad E(0,0) = 0, \quad E(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

$$(b) \quad \dot{E}(x,y) = \frac{1}{c}xy + Ly\left(-\frac{x}{Lc} - \frac{Ry}{L}\right) = -Ry^2,$$

Donde  $\dot{E}(x,y) \leq 0$  en una vecindad de  $(0,0)$ .

En virtud del teorema (4.1), el punto de equilibrio  $\hat{x} = (0,0)$  es estable. La energía total E decrece a lo largo de la curva solución a causa de la caída de voltaje en la resistencia. La resistencia R corresponde a una fuerza amortiguadora mecánica la cual actúa para decrecer la frecuencia de la descarga oscilante, la cual depende del



condensador y la bobina, para finalmente traer el sistema eléctrico al punto de equilibrio, es decir, la intensidad de corriente y la carga se aproxima a  $(0,0)$  sin oscilaciones.

#### **4.4. Propuesta didáctica de la asignatura ecuaciones diferenciales aplicadas en el Departamento de Física - UNJBG**

Diecisiete estudiantes del segundo año de la Escuela de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Jorge Basadre Grohmann, participaron en un pretest y postest elaborado para evaluar la efectividad de la didáctica para el estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, mediante la obtención de funciones multivariadas. Cada alumno desarrolló un cuestionario con preguntas de estabilidad y estabilidad asintótica y después se aplicó un cuestionario con la didáctica del profesor. ¿Estos datos proporcionan suficientes evidencias para indicar que la didáctica empleada por el profesor es efectiva a un nivel de una significancia del 0,05?

##### **4.4.1. Datos**

Los puntajes de la encuesta a 17 estudiantes del segundo año de la Escuela de Física Aplicada, antes y después de participar en la didáctica para la obtención de funciones multivariadas para el estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal, que se indican en la tabla 2.

**Tabla 2**

*Puntajes del Pretest y Postest a 17 estudiantes del segundo año de la Escuela de Física Aplicada de la Facultad de Ciencias de la UNJBG.*

Código de los alumnos	Pretest Antes de la Didáctica	Postest Después de la Didáctica
2011121006	10	16
2011121008	12	16
2011121013	13	17
2012-36211	14	15
2012-36221	11	14
2012-36223	10	14
2012-36238	11	15
2012-36244	12	16
2012-36248	13	17
2013-38771	12	13
2013-38786	12	14
2013-38792	10	15
2013-38801	12	13
2013-38812	11	17
2013-38815	10	14
2013-38817	11	15
2013-38822	13	16

Fuente: Elaboración propia

#### 4.4.2. Estadísticos

Se llevó a cabo el análisis exploratorio de los datos obtenidos y se determinó las medidas descriptivas de las variables antes y después de participar activamente en la didáctica de la estabilidad, las cuales se indican en las tablas 2, 3, 4 y sus correspondientes histogramas en las figuras 7 y 8.

**Tabla 3**

*Análisis exploratorio de los datos y determinación de las medidas descriptivas antes y después de participar en la didáctica de la estabilidad.*

	Antes de la didáctica	Después de la didáctica
N	válidos	17,00
	Perdidos	0,00
Media	11,59	15,12
Desv. típ.	1,23	1,32
Varianza	1,51	1,73
Mínimo	10,00	13,00
Máximo	14,00	17,00

Fuente: Resultado estadístico

**Tabla 4***Frecuencia antes de la didáctica de la estabilidad*

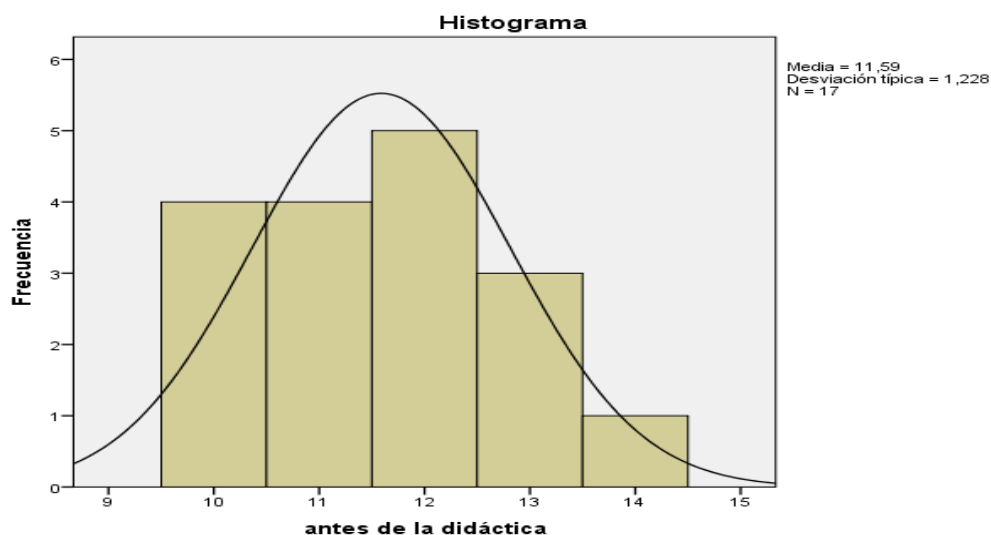
		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	10	4	23,5	23,5	23,5
	11	4	23,5	23,5	47,1
	12	5	29,4	29,4	76,5
	13	3	17,6	17,6	94,1
	14	1	5,9	5,9	100,0
	Total	17	100,0	100,0	

Fuente: Resultado estadístico

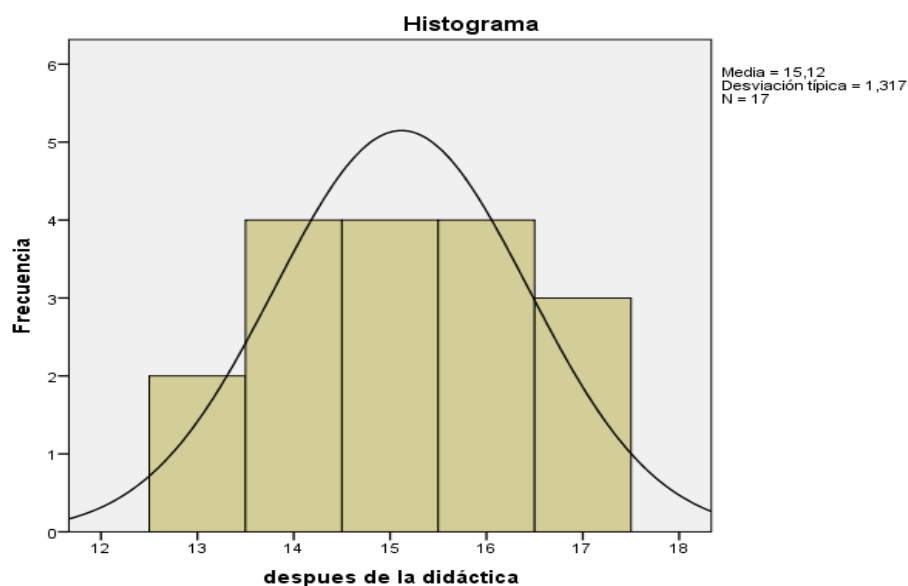
**Tabla 5***Frecuencia después de la didáctica de la estabilidad*

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	13	2	11,8	11,8	11,8
	14	4	23,5	23,5	35,3
	15	4	23,5	23,5	58,8
	16	4	23,5	23,5	82,4
	17	3	17,6	17,6	

Fuente: Resultado estadístico

**Histogramas****Figura 7.** Histograma antes de la didáctica de la estabilidad

Fuente: Resultado estadístico



**Figura 8.** Histograma después de la didáctica de la estabilidad  
Fuente: Resultado estadístico

#### 4.4.3. Descripción y análisis de la normalidad para las diferencias

Se generó la variable diferencia: **(di)** = (Después – Antes) de la didáctica, en una población de 17 estudiantes cuyos resultados se muestran en la tabla 6.

**Tabla 6**

*Diferencias (di)*

Código de los alumnos	Pretest Antes de la Didáctica	Postest Después de la Didáctica	Diferencia ( <b>di</b> )
2011121006	10	16	4
2011121008	12	16	4
2011121013	13	17	4
2012-36211	14	15	1
2012-36221	11	14	3
2012-36223	10	14	4
2012-36238	11	15	4
2012-36244	12	16	4
2012-36248	13	17	4
2013-38771	12	13	1
2013-38786	12	14	2
2013-38792	10	15	5
2013-38801	12	13	1
2013-38812	11	17	6
2013-38815	10	14	4
2013-38817	11	15	4
2013-38822	13	16	3

Fuente: Elaboración propia

**a) Formulación de la hipótesis**

H<sub>0</sub>: Datos de las diferencias que provienen de poblaciones normales

H<sub>1</sub>: Datos de las diferencias que no provienen de poblaciones normales

**b) Nivel de significancia:  $\alpha = 0,05$**

**c) Determinación del estadístico a utilizar**

La prueba de normalidad de Kolgomorov-Smimov se realizó para las diferencias (di) en una población de 17 estudiantes, las cuales se muestran en la tabla 7 y también se elaboró un gráfico de normalidad las cuales se muestran en las figuras 9 y 10.

**Tabla 7**

*Prueba de normalidad Kolgomorov-Smimov y Shapiro-Wilk*

	Kolmogorov-Smirnova <sup>a</sup>			Shapiro-Wilk		
	Estadístico	gl	Sig.	Estadístico	gl	Sig.
diferencia	0,27	17,00	0,01	0,88	17,00	0,03

a. Corrección de la significación de Lilliefors

Fuente: Resultados estadísticos

**d) Criterio:**

Rechazamos la H<sub>0</sub>

**e) Conclusión:**

H<sub>1</sub>: Las diferencias de los datos no provienen de poblaciones normales

### Elaboración de la gráfica Q-Q de la diferencia (di)

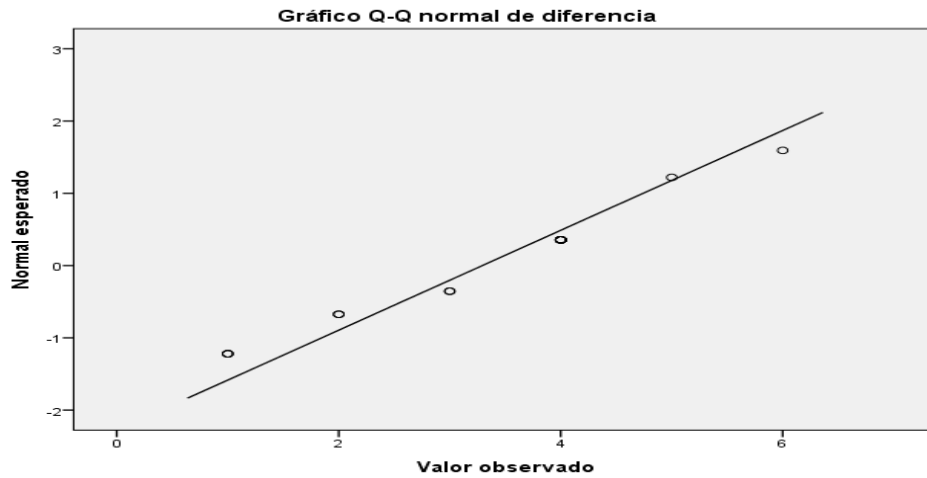


Figura 9. Gráfico de la normalidad de la diferencia  
Fuente: Resultados estadísticos

### Elaboración de la gráfica Q-Q sin tendencia de diferencia

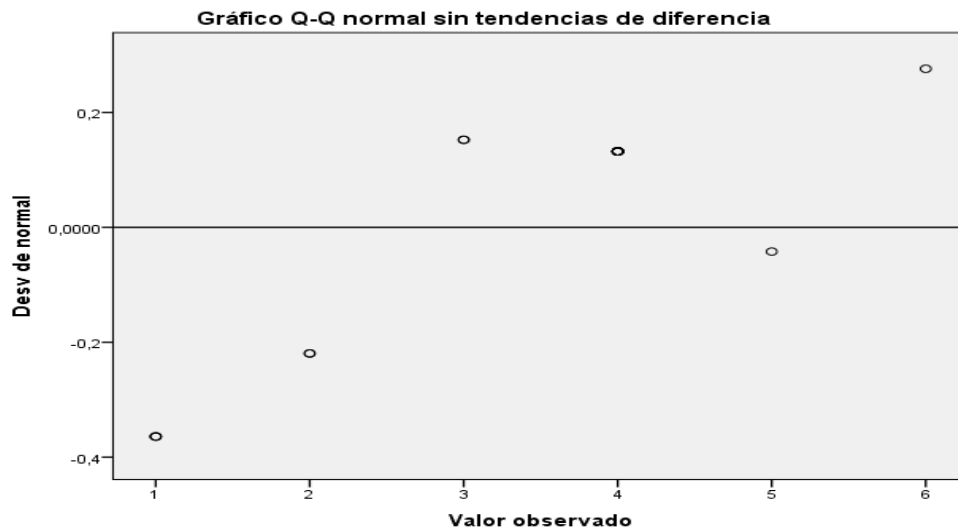


Figura 10. Gráfico de la normalidad sin tendencia de diferencia  
Fuente: Resultados estadísticos

La diferencia **di**, dado que, no cumplen con el supuesto de normalidad, entonces utilizaremos la prueba no paramétrica de Wilcoxon, para comparar los dos grupos.

#### 4.4.4. Estadística de prueba no paramétrica de Wilcoxon

##### a) Formulación de la hipótesis

H<sub>0</sub>: No existe diferencia entre los puntajes de evaluación de la teoría de la estabilidad antes y después de participar en la didáctica del profesor.

H<sub>1</sub>: Existe diferencia entre los puntajes de evaluación de la teoría de la estabilidad antes y después de participar en la didáctica del profesor.

##### b) Nivel de significancia: $\alpha = 0,05$

##### c) Determinación del estadístico a utilizar

Suma de los rangos con signos positivos y negativos.

##### d) Cálculo del estadístico

Para las dos muestras relacionadas, se realizó la prueba no paramétrica de Wilcoxon, las cuales se indican en las tablas 8 y 9.

**Tabla 8**

*Prueba estadística no paramétrica por rangos*

	N	Rango promedio	Suma de rangos
Después de la didáctica - antes de la didáctica	Rangos negativos	0 <sup>a</sup>	0,00
	Rangos positivos	17 <sup>b</sup>	9,00
	Empates	0 <sup>c</sup>	153,00
	Total	17	

a. Después de la didáctica < antes de la didáctica

b. Después de la didáctica > antes de la didáctica

c. Después de la didáctica = antes de la didáctica

Fuente: Resultados estadísticos

**Tabla 9**

*Estadísticos de contraste<sup>a</sup>*

	Después de la didáctica – antes de la didáctica
Z	-3,668 <sup>b</sup>
Sig. asintót. (bilateral)	0,000

a. Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon

b. Basado en los rangos negativos.

Fuente: Resultados estadísticos

**e) Decisión**

Como  $p < 0,05$  rechazar la hipótesis nula

**f) Conclusión:**

Se concluye que existe diferencia entre los puntajes de evaluación; antes y después de participar en la didáctica del profesor.



## CAPÍTULO V

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 5.1. Conclusiones

La estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal consiste en construir funciones multivariantes especiales, sin necesidad de resolver la ecuación diferencial o el sistema de ecuaciones diferenciales que por lo general es muy complejo resolverlo.

No existe un método único ni definitivo para encontrar funciones multivariantes para el estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal; si la función multivariable es estricta, entonces el punto de equilibrio de un sistema autónomo no lineal es asintóticamente estable.

De los 17 estudiantes que participaron en la evaluación a través del pretest y postest para evaluar la efectividad de la didáctica en la obtención de funciones multivariantes para el estudio generalizado de la estabilidad y estabilidad asintótica de los puntos de equilibrio de un sistema autónomo no lineal. Las pruebas estadísticas nos proporcionaron datos suficientes para indicar que la didáctica empleada por el docente es efectiva a un nivel de una significancia del 0,05.

## 5.2. Recomendaciones

Realizar estudios en sistemas no autónomos lineales para establecer la estabilidad y estabilidad asintótica de las soluciones de una ecuación diferencial.

$$\dot{x} = F(x, t),$$

donde  $F: W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación de clase  $C^1$  en un conjunto abierto  $W \subset \mathbb{R}^n$ .

Realizar estudios en sistemas no autónomos no lineales para establecer la estabilidad y estabilidad asintótica de las soluciones de una ecuación diferencial.

$$\dot{x} = F(x, t),$$

donde  $F: W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación de clase  $C^1$  en un conjunto abierto  $W \subset \mathbb{R}^n$ .

## BIBLIOGRAFÍA

- Elsgolts, L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. Mir, Moscú 1979.
- Hirsh, M. *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámico y Álgebra Lineal*. Alianza Editorial, Madrid 1983.
- Kreider, D. *Ecuaciones Diferenciales*. Fondo educativo interamericano, México 1978.
- Krasnov, L. *Teoría de la Estabilidad*, Reverté, Barcelona 1978.
- La Salle, J. *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. Academic Press, New York 1973.
- Mello, A. *Ecuaciones Diferenciales*. Imesp, Brasil 1979.
- Peixoto, M. *Dynamical Systems*. Academic Press, Nueva York 1978.
- Perko, L. *Differential Equations and Dinamical Systems*, Springer Verlag, New York 1991.
- Pontryagin, I. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Addison Werley, Reading, Massachusetts 1980.
- Sotomayor, J. *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Euclides, Brasil 1979.
- Abedi, F., Leong, W. J., & Abedi, M. (2015). Lyapunov Characterization for the Stability of Stochastic Control Systems, 2015.
- Aguila-Camacho, N., & Duarte-Mermoud, M. a. (2015). Comments on "Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 25(1-3), 145–148.  
<http://doi.org/10.1016/j.cnsns.2015.01.013>

- Aldibekov, T. M., & Aldazharova, M. M. (2014). On the Stability by the First Approximation of Lyapunov Characteristic Exponents in Critical Cases, *50*(10), 1384–1388.
- Balint, S., & Epure, S. (2011). Non-Lyapunov Type Stability in a Model of the Dewetted Bridgman Crystal Growth Under Zero Gravity Conditions. *Microgravity Science and Technology*, *23*(S1), 49–58. <http://doi.org/10.1007/s12217-011-9270-9>
- Bernstein, S. P. B. and D. S. (2003). *Nontangency-based Lyapunov tests for convergence and stability in systems having a continuum of equilibria*, *42*(5), 1745–1775.
- Brener, V. A. T. and E. A. (1980). *Crystallization stability during capillary shaping*, *50*.
- Córdova, H. A. D. y L. F. (2007). *Análisis de estabilidad del reactor PFTR para una reacción con cinética de primer orden utilizando la funcional de Lyapunov*.
- Chen, D., Zhang, R., Liu, X., & Ma, X. (2014). Fractional order Lyapunov stability theorem and its applications in synchronization of complex dynamical networks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *19*(12), 4105–4121. <http://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.05.005>

- Cheng-Wu Chen, Chien-wen Shen, Chen-Yuan Chen, M.-J. C. (2010). Stability analysis of an oceanic structure using the Lyapunov method. *Engineering Computations*, 27(2), 186–204. <http://doi.org/10.1108/02644401011022364>
- Duarte-Mermoud, M. a., Aguila-Camacho, N., Gallegos, J. a., & Castro-Linares, R. (2015). Using general quadratic Lyapunov functions to prove Lyapunov uniform stability for fractional order systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 22(1-3), 650–659. <http://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.10.008>
- Epp, Susanna S. (2011). *Discrete mathematics with applications*. Fourth edition. Printed in Canada. Cengage Learning.
- Erugin, N. P. (1959). *On the stability of the solutions of a system of homogeneous linear differential equations with periodic (and other) coefficients*.
- Farnam, A., & Mahboobi Esfanjani, R. (2016). Improved linear matrix inequality approach to stability analysis of linear systems with interval time-varying delays. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 294, 49–56. <http://doi.org/10.1016/j.cam.2015.07.031>
- Feng, C., & Zhu, W. (2008). Asymptotic Lyapunov stability with probability one of Duffing oscillator subject to time-delayed feedback control and bounded noise excitation. *Acta Mechanica*, 208(1-2), 55–62. <http://doi.org/10.1007/s00707-008-0126-3>

- Florchinger, P. (1995). *Lyapunov-like techniques for stochastic stability*, 33(4), 1151–1170.
- Freedman, H. I. (1979). *Stability analysis of a predator-prey system with mutual interference and density-dependent death rates*, 41(1975), 67–78.
- Galán, M. (2010). *Análisis cinemático de sistema mecánico con control giroscópico para ascenso y descenso de escaleras en una silla de ruedas para pacientes hemipléjicos con lesiones torácicas en t4 y menores*. Sección de Estudios de Posgrado e Investigación. Instituto Politécnico Nacional. México.
- Giacobbe, A., & Mulone, G. (2014). Stability in the Rotating Bénard Problem and Its Optimal Lyapunov Functions. *Acta Applicandae Mathematicae*, 132(1), 307–320. <http://doi.org/10.1007/s10440-014-9905-0>
- Ginsberg, J. H. (1973). *The dynamic stability of a pipe conveying a pulsatile flow*, 1, 1013–1024.
- Goh, B. S. (1978). Global stability in a class of prey-predator models, 525–533.
- Gordillo, F. (2009). Estabilidad de Sistemas No Lineales basada en la Teoría de Liapunov. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial*. Volumen 6. N° 2. Sevilla España.
- Hill, B. L. and D. J. (2014). *Stability via hybrid-event-time Lyapunov function and impulsive stabilization for discrete-time delayed switched systems*, 52(2), 1338–1365.

- Hu, J.-B., Lu, G.-P., Zhang, S.-B., & Zhao, L.-D. (2015). Lyapunov stability theorem about fractional system without and with delay. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 20(3), 905–913. <http://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.05.013>
- Iñarrea, M., Lanchares, V., Palacián, J. F., Pascual, a. I., Salas, J. P., & Yanguas, P. (2015). Lyapunov stability for a generalized Hénon–Heiles system in a rotating reference frame. *Applied Mathematics and Computation*, 253, 159–171. <http://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.072>
- Isaeva, L. S. (1959). *On the sufficient conditions of stability of rotation of a tippe-top on a perfectly rough horizontal surface*, 572–578.
- Isidori, (1999). *Nonlinear control systems II*. Springer-Verlag.
- Khalil, H. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall. Segunda Edición. NJ.
- Kinnear, Thomas C. y Taylor, James R. (1998). *Investigación de mercados*. Quinta edición. México.
- Koeffitsientamy, S. P. (1958). *On the stability of a trivial solution of a linear system with periodic coefficients*.
- Krementulo, V. V. (1966). *On the optimal stabilization of a rigid body with a fixed point by means of pendulums*, 0(123).
- Liu, S., Jiang, W., Li, X., & Zhou, X.-F. (2016). Lyapunov stability analysis of fractional nonlinear systems. *Applied Mathematics Letters*, 51(2015), 13–19. <http://doi.org/10.1016/j.aml.2015.06.018>

- Liu, X., & Chen, L. (2003). *Complex dynamics of Holling type II Lotka – Volterra predator – prey system with impulsive perturbations on the predator*, 16, 311–320.
- Lunts, I. L. (1960). *On the instability of the axis of the gyroscope figure*, (2).
- Marc W. Mcconley, Brent D. Appleby, Munther A. Dahleh, and E. F. (1998). *Computational complexity of lyapunov stability analysis problems for a class of nonlinear systems*, 36(6), 2176–2193.
- Marcati, P. (1984). *Decay and Stability for Nonlinear Hyperbolic Equations*, 58, 30–58.
- Mohammad Khansari-Zadeh, S., & Billard, A. (2014). Learning control Lyapunov function to ensure stability of dynamical system-based robot reaching motions. *Robotics and Autonomous Systems*, 62(6), 752–765. <http://doi.org/10.1016/j.robot.2014.03.001>
- Ning, C., He, Y., Wu, M., & Zhou, S. (2015). Indefinite derivative Lyapunov–Krasovskii functional method for input to state stability of nonlinear systems with time-delay. *Applied Mathematics and Computation*, 270, 534–542. <http://doi.org/10.1016/j.amc.2015.08.063>
- Nishimura, Y. (2015). Lyapunov Stability for Dynamical Systems Driven by Rough Paths\*\*This work was partially supported by Grant-in-Aid for Young Scientists (B) of KAKENHI (25820184). *IFAC-PapersOnLine*, 48(11), 994–999. <http://doi.org/10.1016/j.ifacol.2015.09.322>



- Osorio, M., & Moreno, J. A. (2008). Diseño disipativo de observadores para sistemas no lineales discontinuos o multivaluados. *Revista Iberoamericana de Automática E Informática Industrial RIAI*, 5(1), 27–36. [http://doi.org/10.1016/S1697-7912\(08\)70121-3](http://doi.org/10.1016/S1697-7912(08)70121-3)
- R. Ambrosino, M. Ariola, and F. A. (2012). *A convex condition for robust stability analysis via polyhedral lyapunov functions*, 50(1), 490–506.
- Redkar, S. (2012). Lyapunov Stability of Quasiperiodic Systems. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 1–10. <http://doi.org/10.1155/2012/721382>
- Rinaldi, M. G. and S. (1977). *Stability analysis of predator-prey models via the Liapunov method*, 339–347.
- ROLEWICZ, K. M. P. and S. (1984). On stability of linear time-varying infinite-dimensional discrete-time systems, 4, 307–315.
- Rumiantsev, V. V. (1961). *On the stability of motion of certain types of gyrostats*, 1158–1169.
- Shen, J. (2006). *Lyapunov stability of complementarity and extended systems \**, 17(4), 1056–1101.
- Silva, E. A. B., & Teixeira, M. A. (2002). *Global asymptotic stability on Euclidean spaces*, 50, 91–114.
- Sontag, E., & Wang, Y. (2000). *Lyapunov characterizations of input to output stability \**, 39(1), 226–249.

- Svensson, L. E. O. (1984). *Walrasian and Marshallian Stability*, 379, 371–379.
- Szegö, E. F. and G. P. (1970). *Qualitative Analysis by Modern Methods of a Stability Problem in Power-system Analysis*. *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 290, 103–111.
- Taousser, F. Z., Defoort, M., & Djemai, M. (2015). Stability analysis of a class of uncertain switched systems on time scale using Lyapunov functions. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, 16, 13–23. <http://doi.org/10.1016/j.nahs.2014.12.001>
- Tsinias, I. K. and J. (2003). *A converse lyapunov theorem for nonuniform in time global asymptotic stability and its application to feedback stabilization*, 42(3), 936–965.
- W. B. Fitzgibbon, S. L. Hollis, and J. J. M. (1997). *Stability and lyapunov functions for reaction-diffusion systems*, 28(3), 595–610.
- Wang, Y.-E., Sun, X.-M., & Wu, B. (2015). *Lyapunov–Krasovskii functionals for switched nonlinear input delay systems under asynchronous switching*. *Automatica*, 61, 126–133. <http://doi.org/10.1016/j.automatica.2015.08.008>
- Xie, X.-P., & Hu, S.-L. (2015). *Relaxed stability criteria for discrete-time Takagi–Sugeno fuzzy systems via new augmented nonquadratic Lyapunov functions*. *Neurocomputing*, 166, 416–421. <http://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.03.038>
- Yuandan Lint, Eduardo D. Sontag, and Y. W. (2003). *a smooth converse Lyapunov theorem for robust stability*, 34(1), 124–160.