



**UNIVERSIDAD JOSÉ CARLOS MARIÁTEGUI**

**VICERRECTORADO DE INVESTIGACIÓN**

**FACULTAD DE INGENIERÍA Y  
ARQUITECTURA**

**ESCUELA PROFESIONAL DE INGENIERÍA CIVIL**

**TESIS**

**ANÁLISIS MATRICIAL DE ESTRUCTURAS POR EL  
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS Y SU  
APLICACIÓN A TÚNELES**

**PRESENTADO POR**

**BACHILLER DIEGO DULIO TRIGOS ARAUJO**

**ASESOR**

**MGR. MARIO PEDRO RODRIGUEZ VASQUEZ**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE**

**INGENIERO CIVIL**

**MOQUEGUA – PERÚ**

**2018**

## CONTENIDO

	<b>Pág.</b>
<b>PORTADA</b>	
Pagina de jurados .....	i
Dedicatoria .....	ii
Agradecimientos .....	iii
Contenido .....	iv
INDICE DE TABLAS .....	x
INDICE DE FIGURAS .....	xii
INDICE DE ECUACIONES .....	xviii
RESUMEN.....	xxxv
ABSTRACT.....	xxxvi
INTRODUCCIÓN .....	xxxvii

## CAPÍTULO I

### PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Descripción de la realidad del problema.....	1
1.2 Definición del problema .....	2
1.3 Objetivos de la investigación .....	2
1.3.1 Objetivo general .....	2
1.3.2 Objetivo específicos .....	2
1.4 Justificación .....	3
1.5 Alcances y limitaciones .....	4
1.6 Variables .....	4

1.6.1	Variable independiente.....	4
1.6.2	Variable dependiente.....	4
1.7	Hipótesis de la investigación.....	4

## **CAPÍTULO II**

### **MARCO TEÓRICO**

2.1	Antecedentes de la investigación.....	5
2.2	Bases teóricas.....	6
2.2.1	Elasticidad.....	6
2.2.2	Trabajo y Energía.....	20
2.2.3	Análisis matricial de estructuras.....	25
2.2.4	El método de elementos finitos.....	26
2.3	Definición de términos.....	30
2.3.1	Programas que utilizan el método de elementos finitos.....	30
2.3.2	Sistema discreto.....	30
2.3.3	Sistema continuo.....	30

## **CAPÍTULO III**

### **MÉTODO**

3.1	Tipo de investigación.....	31
3.2	Diseño de la investigación.....	31
3.3	Población y muestra.....	31

3.4 Descripción de instrumentos para recolección de datos. ....	32
---	----

## **CAPÍTULO IV**

### **DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN**

4.1 Elemento finito bidimensional de tres nodos .....	34
4.1.1 Funciones de desplazamiento .....	35
4.1.2 Relación deformación - desplazamiento .....	40
4.1.3 Matriz de rigidez .....	43
4.1.4 Cálculo de desplazamientos .....	44
4.1.5 Relación esfuerzo - deformación.....	47
4.1.6 Alisado de esfuerzos.....	49
4.1.7 Ejemplo para el elemento finito bidimensional de tres nodos .....	50
4.1.8 Ejemplo computacional y manual utilizando elementos de tres nodos.....	52
4.1.9 Comportamiento del elemento finito bidimensional de tres nodos .....	54
4.2 Elemento finito bidimensional de cuatro nodos.....	56
4.2.1 Sistema natural de coordenadas .....	56
4.2.2 Funciones de desplazamiento .....	57
4.2.3 Relación deformación - desplazamiento .....	60
4.2.4 Matriz de rigidez .....	66
4.2.5 Cálculo de desplazamientos .....	68
4.2.6 Relación esfuerzo - deformación.....	68
4.2.7 Extrapolación de esfuerzos.....	69
4.2.8 Alisado de esfuerzos.....	73

4.2.9	Ejemplo para el elemento finito bidimensional de cuatro nodos .....	74
4.2.10	Ejemplo computacional y manual utilizando elementos de cuatro nodos .....	76
4.2.11	Comportamiento del elemento finito bidimensional de cuatro nodos.....	78
4.3	Elemento finito bidimensional de nueve nodos .....	80
4.3.1	Funciones de desplazamiento .....	81
4.3.2	Relación deformación - desplazamiento .....	83
4.3.3	Matriz de rigidez .....	87
4.3.4	Cálculo de desplazamientos .....	89
4.3.5	Relación esfuerzo - deformación.....	89
4.3.6	Extrapolación de esfuerzos.....	91
4.3.7	Alisado de esfuerzos.....	92
4.3.8	Ejemplo para el elemento finito bidimensional de nueve nodos.....	92
4.3.9	Ejemplo manual utilizando elementos de nueve nodos .....	94
4.3.10	Comportamiento del elemento finito bidimensional de nueve nodos .....	94
4.4	Elemento finito bidimensional de cuatro nodos con modos incompatibles....	96
4.4.1	Funciones de desplazamiento .....	97
4.4.2	Relación deformación - desplazamiento .....	100
4.4.3	Matriz de rigidez .....	104
4.4.4	Cálculo de desplazamientos .....	110
4.4.5	Relación esfuerzo - deformación.....	110
4.4.6	Extrapolación y alisado de esfuerzos .....	112
4.4.7	Ejemplo para el elemento finito de cuatro nodos con modos incompatibles .....	112

4.4.8	Ejemplo computacional y manual utilizando elementos incompatibles .....	114
4.4.9	Comportamiento del elemento de cuatro nodos con modos incompatibles .....	115
4.5	Aplicación del método de elementos finitos a túneles .....	117
4.5.1	Topografía .....	118
4.5.2	Geología .....	118
4.5.3	Geotecnia.....	120
4.5.4	Geomecánica .....	123
4.5.5	Comportamiento post-pico del macizo rocoso.....	142
4.5.6	Esfuerzos in-situ .....	150
4.5.7	Forma y dimensiones del túnel 04.....	155
4.5.8	Análisis numérico del túnel 04.....	156

## **CAPÍTULO V**

### **PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS**

5.1	Presentación de resultados .....	177
5.1.1	Resultados de la formulación matricial .....	177
5.1.2	Resultados de la validez de los elementos usados en SAP2000 y Phase2.....	178
5.1.3	Resultados del análisis tensional del macizo rocoso que rodea un túnel.....	180
5.2	Contrastación de hipótesis .....	188

5.3	Discusión de resultados.....	188
5.3.1	Discusión acerca de los resultados de la formulación matricial.....	188
5.3.2	Discusión de resultados de la validez de elementos en SAP2000 y Phase 2.....	192
5.3.3	Discusión de resultados acerca del análisis tensional del túnel 04.....	193

## **CAPÍTULO VI**

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

6.1	Conclusiones .....	194
6.2	Recomendaciones .....	197

<b>REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS</b> .....	199
---	-----

<b>APÉNDICES</b> .....	200
------------------------	-----

<b>MATRIZ DE CONSISTENCIA</b> .....	253
-------------------------------------	-----

## ÍNDICE DE TABLAS

	<b>Pág.</b>
Tabla 1 Resultados de esfuerzos y desplazamientos – elemento de tres nodos .....	51
Tabla 2 Resultados de esfuerzos y desplazamientos – elemento de cuatro nodos.....	75
Tabla 3 Resultados de esfuerzos y desplazamientos – Elemento de nueve nodos.....	93
Tabla 4 Resultados de esfuerzos y desplazamientos – Elemento de modos incomp.....	113
Tabla 5 Resultados del ensayo UCS .....	121
Tabla 6 Resultados del ensayo constantes elásticas .....	122
Tabla 7 Valuación de la resistencia de la roca intacta.....	124
Tabla 8 Valuación RQD .....	125
Tabla 9 Valuación del espaciado de discontinuidades .....	126
Tabla 10 Valuación de la condición de discontinuidades .....	127
Tabla 11 Valuación de la condición de agua subterránea. ....	128
Tabla 12 RMR básico.....	128
Tabla 13 Buzamiento y dirección de las discontinuidades .....	128
Tabla 14 Descripción del rumbo y buzamiento del túnel.....	130
Tabla 15 Valuación de la orientación de las discontinuidades.....	131

Tabla 16 RMR evaluado .....	131
Tabla 17 Datos predictivos del RMR calculado.....	132
Tabla 18 Características del macizo rocoso según el RMR calculado.....	133
Tabla 19 Valores de la constante $m_i$ para distintos tipos de roca.....	136
Tabla 20 Valores de característicos del factor de alteración D .....	139
Tabla 21 Parámetros residuales .....	149
Tabla 22 Propiedades mecánicas de los materiales.....	158
Tabla 23 Comparación de desplazamientos SAP2000 - Phase 2 .....	161
Tabla 24 Comparación de esfuerzos principales SAP2000-Phase 2.....	162
Tabla 25 Comparación de desplazamientos análisis elástico, análisis elasto- plástico... ..	175
Tabla 26 Comparación de resultados para el elemento de tres nodos.....	178
Tabla 27 Comparación de resultados para el elemento de cuatro nodos .....	179
Tabla 28 Comparación de resultados para el elemento de modos incompatibles .....	180
Tabla 29 Relación aproximada entre deformaciones y grado de squeezing. ....	186

## ÍNDICE DE FIGURAS

	<b>Pág.</b>
Figura 1. Estado unidimensional de esfuerzos .....	7
Figura 2. Estado tridimensional de esfuerzos .....	8
Figura 3. Ejemplo de un estado unidimensional de deformación constante .....	9
Figura 4. Estado unidimensional de deformación general .....	10
Figura 5. Estado unidimensional de deformación general en función a deformación unitaria.....	12
Figura 6. Estado bidimensional de deformación general .....	13
Figura 7. Trabajo de una fuerza constante y una fuerza incremental.....	20
Figura 8. Ejemplos de estructuras que utilizan el método de elementos finitos ....	29
Figura 9. Elemento finito bidimensional de tres nodos.....	34
Figura 10. Triangulo de Pascal.....	35
Figura 11. Ejemplo para el alisado de esfuerzos en elementos de tres nodos.....	49
Figura 12. Viga en voladizo sujeta a cargas de corte .....	50
Figura 13. Modelo de cálculo y discretizacion utilizando elementos de tres nodos .....	51
Figura 14. Modelo de cálculo de elementos de tres nodos en SAP2000 .....	52
Figura 15. Desplazamientos verticales para elementos de tres nodos en SAP2000 .....	53
Figura 16. Esfuerzos horizontales para elementos de tres nodos en SAP2000.....	53
Figura 17. Modelo de cálculo de elementos de tres nodos en Phase 2 .....	53
Figura 18. Desplazamientos verticales para elementos de tres nodos en Phase 2.....	54

Figura 19. Esfuerzos horizontales para elementos de tres nodos en Phase 2.....	54
Figura 20. Comportamiento del elemento finito de tres nodos.....	55
Figura 21. Elemento finito bidimensional de tres nodos.....	56
Figura 22. Equivalencia de coordenadas entre el sistema natural y el cartesiano..	57
Figura 23. Cuadratura de Gauss-Legendre (4 Puntos).....	67
Figura 24. Correspondencia entre puntos de Gauss y funciones de interpolación para el elemento finito bidimensional de cuatro nodos.....	70
Figura 25. Ejemplo para el alisado de esfuerzos en elementos de cuatro nodos ...	73
Figura 26. Viga en voladizo sujeta a cargas de corte.....	74
Figura 27. Modelo de cálculo y discretización utilizando elementos de cuatro nodos .....	75
Figura 28. Modelo de cálculo de elementos de cuatro nodos en SAP2000 .....	76
Figura 29. Desplazamientos verticales para elementos de cuatro nodos en SAP2000 .....	77
Figura 30. Esfuerzos horizontales para elementos de cuatro nodos en SAP2000 .....	77
Figura 31. Modelo de cálculo de elementos de cuatro nodos en Phase 2 .....	77
Figura 32. Desplazamientos verticales para elementos de cuatro nodos en Phase 2.....	77
Figura 33. Esfuerzos horizontales para elementos de tres nodos en Phase 2.....	78
Figura 34. Comportamiento del elemento finito de 4 nodos.....	79
Figura 35. Elemento finito bidimensional de nueve nodos.....	80
Figura 36. Cuadratura de Gauss-Legendre (9 Puntos).....	88

Figura 37. Correspondencia entre puntos de Gauss y funciones de interpolación para el elemento finito bidimensional de 9 nodos.....	91
Figura 38. Viga en voladizo sujeta a cargas de corte.....	92
Figura 39. Modelo de cálculo y discretización utilizando elementos de nueve nodos.....	93
Figura 40. Comportamiento del elemento finito de 9 nodos.....	95
Figura 41. Elemento finito de cuatro nodos con modos incompatibles.....	96
Figura 42. Problema de flexión pura para el elemento de 4 nodos.....	97
Figura 43. Deformación exacta de un problema en flexión pura.....	98
Figura 44. Cuadratura de Gauss-Legendre (4 Puntos).....	105
Figura 45. Viga en voladizo sujeta a cargas de corte.....	112
Figura 46. Modelo de cálculo y discretización usando elementos de modos incompatibles.....	113
Figura 47. Modelo de cálculo de elementos de modos incompatibles en SAP2000.....	114
Figura 48. Desplazamientos verticales en elementos incompatibles en SAP2000.....	114
Figura 49. Esfuerzos horizontales en elementos de incompatibles en SAP2000.....	115
Figura 50. Comportamiento del elemento finito de modos incompatibles.....	116
Figura 51. Ubicación provincial del proyecto.....	117
Figura 52. Topografía del túnel 04.....	118
Figura 53. Relieve superficial y portal de entrada del túnel 04.....	119
Figura 54. Geología del túnel 04.....	120

Figura 55. Testigo de ensayo de compresión uniaxial .....	121
Figura 56. Curva de comportamiento esfuerzo-deformación .....	122
Figura 57. Red estereográfica polar para el portal de entrada.....	130
Figura 58. Sectorización RMR del túnel 04.....	133
Figura 59. Estimación del índice geológico de resistencia (GSI) .....	137
Figura 60. Afloramiento en el túnel 04 del proyecto del rio Arma.....	138
Figura 61. Resistencia pico del macizo rocoso del túnel 04 .....	141
Figura 62. Características post-pico para macizos rocosos típicos .....	142
Figura 63. Superficie de fluencia en un espacio “n” dimensional .....	143
Figura 64. Esfuerzos verticales respecto a la profundidad bajo la superficie .....	150
Figura 65. Variación de la relación k respecto de la profundidad .....	151
Figura 66. Variación de la relación k, considerando datos de Chile.....	152
Figura 67. Mapa mundial de esfuerzos .....	153
Figura 68. Mapa mundial de esfuerzos – América del Sur .....	154
Figura 69. Mapa mundial de esfuerzos horizontales para Arequipa.....	154
Figura 70. Forma y dimensiones adoptadas para el túnel 04 .....	156
Figura 71. Modelo matemático y dimensiones de análisis .....	157
Figura 72. Modelo matemático discretizado en el programa SAP2000 .....	159
Figura 73. Modelo matemático discretizado en el programa Phase2 .....	159
Figura 74. Contornos de desplazamientos resultantes en el programa SAP2000 .....	160
Figura 75. Contornos de desplazamientos resultantes en el programa Phase2 ....	160
Figura 76. Contornos de iso tensión principal mínima en el programa SAP2000 .....	161

Figura 77. Contornos de iso tensión principal mínima en el programa Phase2 .....	162
Figura 78. Trayectorias de esfuerzos principales y vectores de desplazamiento .....	163
Figura 79. Malla de elementos finitos deformada para el análisis elástico.....	164
Figura 80. Vectores de desplazamiento para el análisis elástico .....	165
Figura 81. Contornos de desplazamientos para el análisis elástico .....	165
Figura 82. Contornos de tensión normal en la dirección X, del análisis elástico.....	166
Figura 83. Contornos de tensión normal en la dirección Y, del análisis elástico.....	166
Figura 84. Contornos de iso tensión cortante XY, para el análisis elástico.....	167
Figura 85. Interpretación de los esfuerzos normal X e Y .....	167
Figura 86. Contornos de iso tensión principal máxima, para el análisis elástico.....	168
Figura 87. Contornos de iso tensión principal mínima, para el análisis elástico.....	168
Figura 88. Distribución de esfuerzos en una excavación unitaria k=2 .....	169
Figura 89. Contornos de iso tensión en Z, para el análisis elástico .....	171
Figura 90. Contornos de igual factor de resistencia, para el análisis elástico .....	172
Figura 91. Evaluación de tensiones principales en la periferia de la excavación.....	173
Figura 92. Malla de elementos finitos deformada para un análisis elasto-plastico.....	174

Figura 93. Vectores de desplazamientos para el análisis elasto-plastico.....	174
Figura 94. Contornos de desplazamiento del análisis elasto-plastico.....	175
Figura 95. a) Elementos finitos en rango plástico b) Porcentajes de plastificación .....	176
Figura 96. a) Contorno de sobre resistencia del análisis elástico b) contorno de plastificación .....	176
Figura 97. Fallo por squeezing en el túnel de Yacambú-Quivor (Venezuela).....	182
Figura 98. Trazado de convergencia de túneles sin soporte en función a la relación de resistencia del macizo rocoso a la tensión in situ .....	184
Figura 99. Relación aproximada entre la deformación y el grado de dificultad asociado a problemas de Squeezing en túneles sin soporte .....	185
Figura 100. Espesores de plastificación alrededor de la excavación del túnel 04.....	187
Figura 101. Comparación porcentual de error para a) desplazamientos b) esfuerzos .....	190
Figura 102. Comparación de comportamientos conforme al incremento de GDL.....	191

## ÍNDICE DE ECUACIONES

	<b>Pág.</b>
Ecuación 1. Esfuerzo.....	7
Ecuación 2. Esfuerzos cortantes resultantes.....	8
Ecuación 3. Deformación unitaria unidimensional.....	9
Ecuación 4. Deformación unitaria unidimensional infinitesimal.....	11
Ecuación 5. Incremento de la función $u$ que cambia la dimensión $dx$ .....	14
Ecuación 6. Incremento de la función $u$ que cambia la dimensión $dy$ .....	15
Ecuación 7. Primera componente de deformación angular.....	15
Ecuación 8. Deformación angular en el plano $xy$ .....	15
Ecuación 9. Deformaciones unitarias y angulares, tridimensionales.....	15
Ecuación 10. Relación lineal entre fuerzas y deformaciones unidimensionales....	16
Ecuación 11. Relación esfuerzo – deformación unitaria.....	16
Ecuación 12. Relación esfuerzo – deformación unitaria en forma compacta .....	17
Ecuación 13. Relación esfuerzo – deformación tridimensional.....	17
Ecuación 14. Relación esfuerzo – deformación tridimensional en forma matricial.....	18
Ecuación 15. Relación esfuerzo – deformación tridimensional en forma compacta .....	18
Ecuación 16. Relación esfuerzo – deformación para el caso de esfuerzo plano....	19
Ecuación 17. Relación esfuerzo – deformación bidimensional en forma compacta .....	19
Ecuación 18. Relación esfuerzo – deformación para el caso de deformación plana.....	19

Ecuación 19. Relación esfuerzo – deformación bidimensional en forma compacta .....	19
Ecuación 20. Trabajo .....	20
Ecuación 21. Trabajo en comportamiento elástico lineal .....	20
Ecuación 22. Trabajo interno y externo .....	21
Ecuación 23. Principio de trabajos virtuales (PTV).....	22
Ecuación 24. Trabajo interno y externo a partir del PTV .....	23
Ecuación 25. Sustitución de términos en la ecuación del PTV .....	23
Ecuación 26. Inclusión de esfuerzos para la sustitución de términos en la ecuación del PTV .....	23
Ecuación 27. Deformaciones unitarias reales en forma compacta.....	23
Ecuación 28. Desplazamientos reales en forma compacta.....	23
Ecuación 29. Sustitución de desplazamientos reales en la ecuación de deformaciones unitarias reales .....	24
Ecuación 30. Deformaciones unitarias reales, en términos de funciones de interpolación de deformación.....	24
Ecuación 31. Deformaciones unitarias virtuales, en términos de funciones de interpolación de deformación.....	24
Ecuación 32. Desplazamientos virtuales en forma compacta .....	24
Ecuación 33. Sustitución de términos en la ecuación del principio de trabajos virtuales .....	24
Ecuación 34. Extracción del factor común de la ecuación del principio de trabajos virtuales .....	24
Ecuación 35. Principio de trabajos virtuales con términos de igualdad.....	25

Ecuación 36. Principio de trabajos virtuales escrita en forma de ecuación de equilibrio de Hook .....	25
Ecuación 37. Expresión de Rigidez obtenida a través del PTV .....	25
Ecuación 38. Expresión de Fuerzas obtenida a través del PTV .....	25
Ecuación 39. Funciones lineales de desplazamientos obtenidas del triángulo de Pascal.....	36
Ecuación 40. Formación de un sistema de ecuaciones de desplazamientos, para el cálculo de constantes .....	36
Ecuación 41. Sistema de ecuaciones de desplazamientos, en forma matricial .....	36
Ecuación 42. Incógnitas despejadas en la matriz de ecuaciones de desplazamiento .....	36
Ecuación 43. Inversión de una componente de la matriz de ecuaciones de desplazamiento .....	37
Ecuación 44. Area de un elemento finito de tres nodos .....	37
Ecuación 45. Constantes a ser reemplazadas en la ecuación de desplazamientos .....	37
Ecuación 46. Sustitución de constantes en la ecuación de desplazamientos .....	38
Ecuación 47. Función de desplazamientos, expresada en términos de desplazamientos nodales .....	38
Ecuación 48. Sustitución conveniente de términos que contienen a la ecuación de desplazamientos.....	38
Ecuación 49. Funciones de interpolación de desplazamientos .....	38
Ecuación 50. Desplazamiento en la dirección “y”, expresado en termino de funciones de interpolación .....	39

Ecuación 51. Funciones de desplazamientos en forma matricial.....	39
Ecuación 52. Expresión matricial compacta de las ecuaciones de desplazamientos .....	40
Ecuación 53. Deformaciones unitarias necesarias para comportamientos bidimensionales en el plano x, y .....	40
Ecuación 54. Deformaciones unitarias bidimensionales, escrita en forma matricial.....	40
Ecuación 55. Deformaciones unitarias bidimensionales, escrita en forma compacta .....	40
Ecuación 56. Operador conveniente en derivadas parciales .....	41
Ecuación 57. Deformaciones unitarias escrita en términos de funciones de interpolación .....	41
Ecuación 58. Expresión compacta de la matriz de funciones de interpolación de deformación.....	41
Ecuación 59. Deformaciones unitarias, escrita en términos de la matriz de funciones de interpolación de deformación .....	41
Ecuación 60. Desarrollo de la matriz de funciones de interpolación de deformación.....	42
Ecuación 61. Matriz de funciones de interpolación que implica derivar parcialmente .....	42
Ecuación 62. Matriz de funciones de deformación, obtenida después del desarrollo de derivadas parciales .....	42
Ecuación 63. Expresión de Rigidez obtenida a través del PTV.....	43
Ecuación 64. Expresión de Rigidez bidimensional obtenida a través del PTV .....	43

Ecuación 65. Expresión de Rigidez para el elemento finito de tres nodos .....	43
Ecuación 66. Equilibrio global del sistema.....	44
Ecuación 67. Ensamblaje de términos de rigidez asociados al sistema .....	44
Ecuación 68. Ensamblaje de términos de fuerza, asociado al sistema.....	44
Ecuación 69. Matriz de rigidez de un sistema, escrito a partir de submatrices.....	45
Ecuación 70. Vector de fuerzas de un sistema.....	45
Ecuación 71. Vector de desplazamientos de un sistema .....	45
Ecuación 72. Vector de desplazamientos en términos de componentes de grados de libertad restringidos .....	46
Ecuación 73. Equilibrio de un sistema.....	46
Ecuación 74. Relación entre fuerzas en los GDL libres y componentes de desplazamientos en los GDL libres y restringidos.....	46
Ecuación 75. Desplazamientos de los grados de libertad libres.....	46
Ecuación 76. Reacciones de un sistema .....	46
Ecuación 77. Relación entre esfuerzos y deformaciones en forma compacta .....	47
Ecuación 78. Relación esfuerzo deformación, en términos de desplazamientos y funciones de interpolación de deformación .....	47
Ecuación 79. Matriz constitutiva de materiales para el caso de esfuerzo en el plano .....	48
Ecuación 80. Estado de esfuerzos en un elemento finito de tres nodos.....	48
Ecuación 81. Alisado de esfuerzos en un nodo “a” de un elemento finito de tres nodos .....	50
Ecuación 82. Alisado de esfuerzos en los nodos “b” y “c” de un elemento finito de tres nodos.....	50

Ecuación 83. Porcentaje de error .....	51
Ecuación 84. Funciones de interpolacion para el tipico elemento de cuatro nodos .....	58
Ecuación 85. Función de desplazamientos para la dirección x del elemento de cuatro nodos .....	59
Ecuación 86. Funcion de desplazamientos para la dirección y del elemento de cuatro nodos .....	59
Ecuación 87. Funciones de desplazamiento escritas en forma matricial para el elemento de cuatro nodos.....	59
Ecuación 88. Forma compacta de la matriz de funciones de desplazamiento del elemento de cuatro nodos.....	59
Ecuación 89. Deformaciones unitarias necesarias para un comportamiento en el plano XY .....	60
Ecuación 90. Deformaciones unitarias bidimensionales, escrita en forma matricial.....	60
Ecuación 91. Sustitución conveniente de un operador en derivadas parciales .....	60
Ecuación 92. Operador de derivadas parciales en coordenadas cartesianas .....	60
Ecuación 93. Regla de la cadena.....	61
Ecuación 94. Regla de la cadena escrita en forma matricial.....	61
Ecuación 95. Jacobiano de la transformación .....	61
Ecuación 96. Inversión del jacobiano de la transformación en la matriz de regla de la cadena .....	62
Ecuación 97. Desarrollo de la inversa del jacobiano de la transformación .....	62
Ecuación 98. Matriz de equivalencia de un sistema cartesiano a un sistema	

natural.....	62
Ecuación 99. Desarrollo de la matriz de equivalencia de un sistema cartesiano a un sistema natural .....	62
Ecuación 100. Operador conveniente en derivadas parciales para un sistema en coordenadas naturales .....	63
Ecuación 101. Deformaciones unitarias equivalentes en un sistema cartesiano....	63
Ecuación 102. Deformaciones unitarias equivalentes en un sistema cartesiano escrito en notación matricial compacta .....	63
Ecuación 103. Deformaciones unitarias escrita en términos de funciones de interpolación.....	63
Ecuación 104. Matriz de funciones de interpolación de deformación escrita en forma compacta.....	64
Ecuación 105. Deformaciones unitarias escrita en términos de la matriz de funciones de interpolación de deformación .....	64
Ecuación 106. Desarrollo de la matriz de funciones de interpolación de deformación.....	64
Ecuación 107. Separación en dos componentes de la matriz de funciones de interpolación de deformación .....	64
Ecuación 108. Primera componente de la matriz de funciones de interpolación...	64
Ecuación 109. Segunda componente de la matriz de funciones de interpolación.....	65
Ecuación 110. Desarrollo de la segunda componente de la matriz de funciones de interpolación.....	65
Ecuación 111. Función de interpolación geométrica para la coordenada x.....	65

Ecuación 112. Función de interpolación geométrica para la coordenada y.....	65
Ecuación 113. Expresión de rigidez obtenida a partir del PTV .....	66
Ecuación 114. Expresión de rigidez bidimensional obtenida a partir del PTV .....	66
Ecuación 115. Transformación de la ecuación de rigidez de un sistema cartesiano a un sistema natural.....	66
Ecuación 116. Transformación de la ecuación de rigidez de un sistema natural a condiciones de integración numérica .....	67
Ecuación 117. Matriz de rigidez en forma compacta para el elemento de cuatro nodos .....	68
Ecuación 118. Equilibrio de un sistema.....	68
Ecuación 119. Relación esfuerzo deformación .....	68
Ecuación 120. Relación esfuerzo deformación en términos de la matriz de funciones de interpolación de deformación .....	69
Ecuación 121. Estado de esfuerzos en los cuatro puntos de Gauss-Legendre.....	69
Ecuación 122. Función de interpolación de esfuerzos en el intervalo correspondiente a los puntos de Gauss.....	70
Ecuación 123. Expresión conveniente de la primera función de interpolación utilizada para extrapolación .....	70
Ecuación 124. Expresión conveniente de la segunda tercera y cuarta función de interpolación utilizada para extrapolación .....	71
Ecuación 125. Estado de esfuerzos extrapolado al nodo “1” de un elemento finito de cuatro nodos bidimensional .....	71
Ecuación 126. Estado de esfuerzos extrapolado al nodo “1” de un elemento de cuatro nodos en función de coordenadas del primer punto	

de Gauss .....	71
Ecuación 127. Expresión generalizada de extrapolación de esfuerzos a un nodo “n” .....	71
Ecuación 128. Expresión generalizada de extrapolación de esfuerzos a un nodo “n” retomando la forma típica de las funciones de interpolación .....	72
Ecuación 129. Forma compacta de la expresión generalizada de extrapolación de esfuerzos a un nodo “n” .....	72
Ecuación 130. Desarrollo de la expresión generalizada de extrapolación de esfuerzos a los cuatro nodos del elemento de cuatro nodos.....	72
Ecuación 131. Ejemplo de alisado de esfuerzos extrapolados a un nodo “c” de un elemento de cuatro nodos .....	74
Ecuación 132. Porcentaje de error .....	75
Ecuación 133. Funciones de interpolación para el elemento de nueve nodos .....	81
Ecuación 134. Función de desplazamientos para el elemento de nueve nodos en la dirección “x” .....	82
Ecuación 135. Función de desplazamientos para el elemento de nueve nodos en la dirección “y” .....	82
Ecuación 136. Funciones de desplazamiento del elemento de nueve nodos, escrito en forma matricial .....	82
Ecuación 137. Función de desplazamientos del elemento de nueve nodos, escrito en forma compacta matricial .....	82
Ecuación 138. Deformaciones unitarias necesarias para un comportamiento en el plano xy .....	83

Ecuación 139. Deformaciones unitarias para un comportamiento en el plano $xy$ , escrito en forma matricial.....	83
Ecuación 140. Sustitución conveniente de un operador en derivadas parciales ....	83
Ecuación 141. Operador conveniente en derivadas parciales cartesianas.....	83
Ecuación 142. Operador conveniente en derivadas parciales naturales.....	84
Ecuación 143. Jacobiano de la transformación .....	84
Ecuación 144. Deformaciones unitarias escrita en términos de coordenadas naturales .....	84
Ecuación 145. Deformaciones unitarias escrita en forma matricial compacta .....	84
Ecuación 146. Deformaciones unitarias escrita en términos de funciones de interpolación.....	84
Ecuación 147. Función de interpolación de deformación escrita en forma matricial compacta .....	85
Ecuación 148. Deformaciones unitarias escrita en términos de la función de interpolación de deformación en forma compacta.....	85
Ecuación 149. Desarrollo de la función de interpolación de deformación para el elemento de nueve nodos .....	85
Ecuación 150. Subdivisión de la matriz de funciones de interpolación de deformación .....	85
Ecuación 151. Primera componente de la matriz de funciones de interpolación de deformación para el elemento de nueve nodos .....	86
Ecuación 152. Segunda componente de la matriz de funciones de interpolación de deformación para el elemento de nueve nodos .....	86
Ecuación 153. Desarrollo de la segunda componente la matriz de funciones de	

interpolación de deformación para el elemento de nueve nodos ...	86
Ecuación 154. Función de interpolación geométrica para la coordenada x.....	86
Ecuación 155. Función de interpolación geométrica para la coordenada y.....	86
Ecuación 156. Expresión de rigidez obtenida a partir del PTV .....	87
Ecuación 157. Expresión de rigidez para un caso bidimensional obtenida del PTV .....	87
Ecuación 158. Transformación de la ecuación de rigidez en coordenadas cartesianas a coordenadas naturales .....	87
Ecuación 159. Rigidez en coordenadas naturales utilizando integración numérica.....	88
Ecuación 160. Matriz de rigidez para el elemento de nueve nodos, escrita en forma compacta.....	89
Ecuación 161. Equilibrio de un sistema.....	89
Ecuación 162. Relación esfuerzo deformación.....	90
Ecuación 163. Relación esfuerzo deformación escrita en términos de la matriz de función de interpolación de deformación.....	90
Ecuación 164. Estado de esfuerzos en los nueve puntos de Gauss-Legendre .....	90
Ecuación 165. Función de interpolación de esfuerzos en el elemento de nueve nodos .....	91
Ecuación 166. Función de extrapolación generalizada de esfuerzos a un nodo “n” .....	91
Ecuación 167. Porcentaje de error .....	93
Ecuación 168. Solución que provee el típico elemento finito de cuatro nodos para un problema de flexión pura.....	97

Ecuación 169. Solución exacta que provee la teoría de vigas para un problema de flexión pura .....	97
Ecuación 170. Funciones de interpolación del típico elemento de cuatro nodos...	98
Ecuación 171. Funciones de interpolación incompatibles .....	98
Ecuación 172. Función de desplazamientos en la dirección $x$ para el elemento de cuatro nodos con modos incompatibles.....	99
Ecuación 173. Función de desplazamientos en la dirección $y$ para el elemento de cuatro nodos con modos incompatibles .....	99
Ecuación 174. Funciones de desplazamiento para el elemento de nueve nodos, escrita en forma matricial.....	99
Ecuación 175. Funciones de desplazamientos, escrita en forma matricial compacta .....	99
Ecuación 176. Deformaciones unitarias necesarias para un comportamiento bidimensional en el plano $xy$ .....	100
Ecuación 177. Deformaciones unitarias para un comportamiento bidimensional escrita en forma matricial .....	100
Ecuación 178. Sustitución de los términos en derivadas parciales de la matriz de deformaciones unitarias .....	100
Ecuación 179. Operador conveniente en derivadas parciales para un sistema cartesiano.....	101
Ecuación 180. Operador conveniente en derivadas parciales para un sistema en coordenadas naturales .....	101
Ecuación 181. Jacobiano de la transformación para un sistema en coordenadas cartesianas .....	101

Ecuación 182. Deformaciones unitarias en forma matricial para un sistema en coordenadas naturales .....	101
Ecuación 183. Deformaciones unitarias escrita en forma compacta.....	102
Ecuación 184. Deformaciones unitarias en términos de funciones de interpolación.....	102
Ecuación 185. Funciones de interpolación de deformación en forma compacta .....	102
Ecuación 186. Deformaciones unitarias, escrita en términos de la matriz de funciones de interpolación de deformación .....	102
Ecuación 187. Desarrollo de la matriz de funciones de interpolación de deformación del elemento de modos incompatibles .....	102
Ecuación 188. División conveniente de la matriz de funciones de interpolación de deformación.....	102
Ecuación 189. Primera componente de la matriz de funciones de interpolación de deformación.....	103
Ecuación 190. Segunda componente de la matriz de funciones de interpolación de deformación.....	103
Ecuación 191. Desarrollo de la segunda componente de la matriz de funciones de interpolación de deformación.....	103
Ecuación 192. Función de interpolación geométrica para la coordenada x.....	104
Ecuación 193. Función de interpolación geométrica para la coordenada y.....	104
Ecuación 194. Expresión de rigidez obtenida a partir del PTV .....	104
Ecuación 195. Expresión de rigidez para un caso bidimensional en coordenadas cartesianas .....	104

Ecuación 196. Expresión de rigidez para un caso bidimensional en coordenadas naturales .....	104
Ecuación 197. Transformación de rigidez utilizando integración numérica.....	105
Ecuación 198. Deformaciones unitarias, distinguiendo términos compatibles e incompatibles .....	106
Ecuación 199. Matriz de corrección de términos incompatibles .....	107
Ecuación 200. Componente de corrección de términos incompatibles.....	107
Ecuación 201. Componente de corrección de términos incompatibles, utilizando integración numerica.....	107
Ecuación 202. Desarrollo numérico de la componente de corrección de términos incompatibles .....	108
Ecuación 203. Area de un elemento finito utilizando integración numérica .....	108
Ecuación 204. Desarrollo numérico del área de un elemento de cuatro nodos, utilizando cuatro puntos de Gauss-Legendre .....	108
Ecuación 205. Deformaciones unitarias, distinguiendo términos compatibles e incompatibles corregidos .....	108
Ecuación 206. Matriz compacta de funciones de interpolación de deformación, distinguiendo términos compatibles e incompatibles corregidos.....	108
Ecuación 207. Matriz de rigidez utilizando integración numérica .....	109
Ecuación 208. Desarrollo numérico de rigidez utilizando cuatro puntos de Gauss-Legendre, para el elemento de modos incompatibles .....	109
Ecuación 209. Matriz de rigidez, distinguiendo términos asociados a desplazamientos compatibles e incompatibles.....	109

Ecuación 210. Condensación estática .....	109
Ecuación 211. Equilibrio de un sistema.....	110
Ecuación 212. Relación esfuerzo deformación.....	110
Ecuación 213. Relación esfuerzo deformación, distinguiendo términos compatibles e incompatibles .....	110
Ecuación 214. Desplazamientos incompatibles .....	111
Ecuación 215. Estado de esfuerzos en los cuatro puntos de Gauss-Legendre .....	111
Ecuación 216. Estado de esfuerzos extrapolados a un nodo “n” .....	112
Ecuación 217. Porcentaje de error .....	113
Ecuación 218. Valuación RQD .....	125
Ecuación 219. Módulo de elasticidad para macizos rocosos con RMR>50 .....	134
Ecuación 220. Módulo de elasticidad para macizos rocosos con RMR<50 .....	134
Ecuación 221. Módulo de elasticidad del macizo rocoso de análisis .....	134
Ecuación 222. Criterio de debilitamiento de Hoek & Brown .....	135
Ecuación 223. Carácter friccionante de la roca intacta de análisis .....	136
Ecuación 224. Valuación del índice geológico de resistencia GSI para el macizo rocoso de análisis .....	138
Ecuación 225. Factor de alteración para el túnel 04 de análisis.....	140
Ecuación 226. Constante $m_b$ necesaria para el criterio de rendimiento de Hoek & Brown .....	140
Ecuación 227. Constante “s” que depende de las características del macizo rocoso .....	140
Ecuación 228. Constante “a” que depende de las características del macizo rocoso .....	140

Ecuación 229. Constantes necesarias para el criterio de debilitamiento del macizo rocoso de análisis.....	140
Ecuación 230. Esfuerzo de tracción del macizo rocoso.....	141
Ecuación 231. Resistencia global del macizo rocoso.....	141
Ecuación 232. Valor máximo que puede tomar el esfuerzo principal mínimo del macizo rocoso de un túnel.....	141
Ecuación 233. Incremento infinitesimal de deformación en estado plástico.....	143
Ecuación 234. Superficie de fluencia de un material.....	144
Ecuación 235. Superficie de fluencia utilizando el criterio de Hoek y Brown ....	144
Ecuación 236. Invariante de esfuerzo .....	144
Ecuación 237. Parámetro de endurecimiento.....	145
Ecuación 238. Forma general del parámetro de endurecimiento.....	145
Ecuación 239. Incrementos de deformación plástica.....	145
Ecuación 240. Regla de flujo asociativa .....	145
Ecuación 241. Función de potencial plástico para el criterio de Hoek y Brown .....	146
Ecuación 242. Variación infinitesimal de superficie de fluencia.....	147
Ecuación 243. Parámetro de endurecimiento e incremento de deformación plástica.....	147
Ecuación 244. Incremento del parámetro de endurecimiento.....	147
Ecuación 245. Variación infinitesimal de tensiones .....	147
Ecuación 246. Magnitud de las deformaciones plásticas.....	147
Ecuación 247. Módulo plástico.....	147
Ecuación 248. Criterio post pico de Hoek y Brown.....	148

Ecuación 249. Índice geológico de resistencia GSI residual .....	149
Ecuación 250. Esfuerzo vertical .....	151
Ecuación 251. Relación entre esfuerzos horizontales y verticales “k” de Sheorey .....	152
Ecuación 252. Relación “k” para el túnel de análisis.....	152
Ecuación 253. Diámetro mínimo estimado de una sección de túnel.....	155
Ecuación 254. Esfuerzo vertical para el túnel de análisis .....	170
Ecuación 255. Esfuerzo principal máximo tomado de la distribución de esfuerzos en una excavación unitaria $k=2$ .....	170
Ecuación 256. Esfuerzos paralelos a la dirección del eje del tunel.....	170
Ecuación 257. Factor de resistencia .....	171
Ecuación 258. Invariantes de esfuerzo .....	172

## RESUMEN

La presente tesis trata sobre el método de elementos finitos, aplicado a problemas que pueden ser tratados con carácter bidimensional y con comportamiento elástico lineal de los materiales. Se desarrolla en esta investigación, la formulación matricial de elementos finitos de tres nodos, cuatro nodos, nueve nodos y cuatro nodos con modos incompatibles, comparando las soluciones de cada elemento finito con las soluciones exactas extraídas de la literatura, para problemas tales como vigas en voladizo sujetas a cargas de corte. También se evalúa el comportamiento de cada elemento finito, conforme a un incremento de grados de libertad. Se comparan los resultados de algunos elementos finitos bidimensionales encontrados en los programas SAP2000 y Phase 2, con los resultados de un cálculo independiente a través de las formulaciones realizadas, utilizando vigas en voladizo sujetas a cargas de corte. Por último se realiza la aplicación del método de elementos finitos a la evaluación tensional de un túnel de conducción de sección herradura simple, a través de un programa conveniente y dirigido al cálculo de túneles, tal como el programa Phase 2, empleando un elemento de tres nodos.

*Palabras Clave:* Análisis Matricial, Método de elementos finitos, Evaluación tensional de túneles.

## ABSTRACT

The present thesis deals with the finite element method, applied to problems that can be treated with a two - dimensional character and with linear elastic behavior of the materials. In this research the finite element matrix formulation of three nodes, four nodes, nine nodes and four nodes with incompatible modes is developed, comparing the solutions of each finite element with the exact solutions extracted from the literature, for problems such as beams in overhangs subject to shear loads. We also evaluate the behavior of each finite element, according to an increase of degrees of freedom. We compare the results of some two-dimensional finite elements found in the SAP2000 and Phase2 programs, with the results of an independent calculation using the formulations made using cantilever beams subjected to shear loads. Finally, the finite element method is applied to the tensional evaluation of a simple horseshoe cross-section tunnel through a convenient tunnel calculation program, such as the Phase2 program, using a three-node element.

*Key Words:* Matrix Analysis, Finite Element Method, Tensional evaluation of tunnels.

## INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el método de elementos finitos es una de las herramientas más utilizadas para dar solución numérica a problemas que pueden ser expresados en función de ecuaciones diferenciales, y que por alguna razón no pueden ser solucionados de forma analítica, ya sea debido a la complejidad de la geometría o debido a la complejidad de las cargas actuantes, etc.

El método de elementos finitos es un método numérico, que al igual que todos los métodos numéricos existentes, intenta convertir una expresión matemática, en un conjunto de ecuaciones algebraicas simultaneas, que implican un gran procesamiento numérico, que puede ser solucionado en la actualidad, únicamente por computadoras digitales, por ello, debe tenerse en cuenta que el método se debe en gran parte al desarrollo tecnológico suscitado a partir de la década de los cincuentas.

Una amplia gama de elementos finitos se han formulado desde la aparición del método y desde el desarrollo progresivo de las computadoras digitales, tal es el caso, que se crearon programas actualmente comerciales, en los que se incluye el método de elementos finitos, para el análisis de estructuras diversas. Programas como SAP2000 de la firma CSI y Phase 2 de la firma Rocscience, son algunos de los ejemplos de programas que contienen el método de elementos finitos para el cálculo estructural.

Los Elementos finitos de cuatro nodos y tres nodos, son los más usados, por los profesionales encargados del análisis estructural, es por tanto, necesario conocer las herramientas que ellos utilizan para dar soluciones a problemas de distinta índole.

La literatura acerca del método es bastante extensa y solo en algunos se logra detallar explícitamente los procedimientos de la formulación de cada elemento finito, y en algunos casos, ni se cuenta con las formulaciones de aquellos elementos finitos modernos y sofisticados usados en el medio.

En la presente investigación, se dará a conocer a manera de detalle, los procedimientos usuales de formulación de algunos elementos muy utilizados, tales como los elementos de tres nodos y cuatro nodos, también se incluirá un elemento sofisticado como es el elemento de cuatro nodos con modos incompatibles, sin duda alguna un elemento muy preciso en problemas típicos de flexión.

Por otra parte, es conocido que el análisis estructural no es más que un medio para lograr un fin, el cual es el diseño y construcción. Debe tenerse en cuenta también, que no tendría sentido realizar un análisis tan eficiente si no se contase con parámetros de entrada igual de eficientes. Por ello, en esta tesis se pretende realizar un análisis tensional de un túnel de conducción, a través de una búsqueda minuciosa de parámetros de entrada.

Es imprescindible también, mencionar algunos acontecimientos que forman parte de la creación del método de elementos finitos, por ello, en 1943 a partir de Courant se presentan las primeras esencias para la formación del método, y años más tarde investigadores como Turner, Clough, Martin y Topp presentan el documento “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures” que impulsa la utilización del Método, este documento fue presentado en el Instituto de Ciencias Aeronáuticas de Nueva York en 1954, pero no es hasta 1956 en que el documento fue publicado. Es al parecer Clough quien en 1960 utilizó por primera vez el término “elemento finito”.

# **CAPÍTULO I**

## **PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN**

### **1.1 Descripción de la realidad del problema**

En la actualidad es frecuente utilizar herramientas bastante sofisticadas cuando se trata de obtener la solución de diversos problemas de la Ingeniería Estructural, y sin duda alguna es por hoy, el método de elementos finitos, la herramienta a la que se recurre con mayor frecuencia.

Estructuras tales como presas y túneles, hoy en día no pueden ser solucionadas mediante técnicas tradicionales, debido a que los resultados no reflejarían la complejidad de las mismas, por ello, un modelo generado a partir del método de elementos finitos, sería el más coherente para este tipo de casos.

Por otra parte, debido al alto potencial que posee el método, y debido a que muchos de los cálculos a realizarse requieren de un exhaustivo trabajo, es que se crearon programas de computadora, de los que se puede obtener de manera inmediata la solución de cualquier tipología estructural.

El creciente uso de programas que utilizan el método de elementos finitos, tales como SAP2000 y Phase2, ha generado que se analicen diversas estructuras con poco o nulo conocimiento de los procedimientos matriciales, y de los distintos tipos de elementos finitos que se generan a partir del método.

Una gran cantidad de elementos finitos han sido creados desde la década de los sesentas hasta la actualidad, y con ellos surgen interrogantes como: ¿Cual elemento finito es el adecuado?, ¿Cual elemento finito requerirá de un menor procesamiento de datos? o ¿Cual elemento finito es el adecuado para solucionar Túneles?, etc. Por otra parte se posee limitada o nula documentación en nuestro medio, acerca de los procedimientos y técnicas matriciales de cada uno de ellos.

## **1.2 Definición del problema**

Puede definirse el problema de investigación a través de la siguiente interrogante: ¿En qué medida el Análisis Matricial de Estructuras por el Método de Elementos Finitos, permitirá conocer el método para realizar la evaluación del estado tensional de un macizo rocoso circundante a un túnel de conducción de sección en herradura?

## **1.3 Objetivos de la investigación**

### **1.3.1 Objetivo general**

Conocer los procedimientos del Análisis Matricial de Estructuras por el Método de Elementos Finitos y aplicar el método analizando el estado tensional del macizo rocoso de un Túnel de conducción, utilizando programas como SAP2000 Y Phase2.

### **1.3.2 Objetivo específicos**

Realizar la deducción de los procedimientos matriciales de formulación de algunos elementos finitos empleados en programas como SAP2000 y Phase2.

Verificar la validez de los elementos utilizados por los programas SAP2000 y Phase2, comparando los resultados que se obtienen a partir de los mismos, con los resultados de un cálculo manual al utilizar ejemplos sencillos.

Emplear un tipo de elemento finito eficiente de los programas SAP2000 y/o Phase2 para realizar el análisis del estado tensional del macizo rocoso que circunda a un túnel de conducción en sección herradura.

#### **1.4 Justificación**

Mediante el Análisis Matricial de Estructuras por el Método de Elementos Finitos y su aplicación a Túneles, se permitirá conocer y entender la formulación de diversos elementos finitos, dado que en nuestro medio se tiene limitada difusión en cuanto a ello. Por otra parte, esta investigación servirá de sustento para esta y otras investigaciones que guarden relación con el método de elementos finitos, enriqueciendo de esta manera el marco teórico y/o cuerpo de conocimientos que existe sobre el tema en mención.

Un ejemplo claro de la aplicación del método de elementos finitos será el análisis del estado tensional del macizo rocoso que circunda a un túnel de conducción, esto debido a que por muchos años sistemas como este, de tipo continuo, no podían ser solucionados empleando métodos clásicos, por tanto, la importancia del método de elementos finitos radica en que hoy en día es uno de los pocos métodos racionales para dar solución a este tipo de estructuras.

## **1.5 Alcances y limitaciones**

En muchos casos, los programas comerciales que utilizan el método de elementos finitos, no entregan al usuario las características acerca de la formulación de los elementos finitos con los que cuenta el programa, por tal motivo, es imprescindible realizar una evaluación de los mismos, a través de comparar los resultados a partir de ciertos problemas que posean soluciones de forma cerrada.

Esta investigación, está orientada a utilizar un programa comercial, una vez que este último sea evaluado, para dar paso a un análisis tensional de un túnel de conducción.

## **1.6 Variables**

### **1.6.1 Variable independiente**

Análisis Matricial por El Método de Elementos Finitos

### **1.6.2 Variable dependiente**

Aplicación a Túneles.

## **1.7 Hipótesis de la investigación**

El desarrollo del Análisis Matricial de Estructuras por el Método de Elementos Finitos y su aplicación a túneles, permitirá conocer al método, al demostrar que los resultados de un problema simple calculado manualmente, son iguales a los resultados obtenidos de los programas SAP2000 y/o Phase2, los mismos que permitirán realizar adecuadamente, el análisis del estado tensional del macizo rocoso que circunda a un túnel de conducción de sección en herradura.

## **CAPÍTULO II**

### **MARCO TEÓRICO**

#### **2.1 Antecedentes de la investigación**

Kaçar O. (2007), Escuela de Ciencias Aplicadas y Naturales de la Universidad Técnica del Medio Este, realizó la tesis de investigación 3D Finite Element modelling of surface excavation and loading over existing tunnels para obtener el Master en Ciencias, en la que se analiza mediante un programa de elementos finitos el efecto del macizo rocoso sobre el revestimiento de túneles existentes, con respecto a la variación de la profundidad y excentricidad de la excavación.

Lanheng Jin (1994), University of Maryland, realizó la tesis de investigación Analysis and Evaluation of a Shell Finite Element with Drilling Degree of Freedom para obtener el Master de Ciencias, donde hace referencia a la construcción de un elemento finito de cascara obtenida mediante la superposición de los componentes de dos elementos finitos tales como placa de flexión y membrana.

Kaushalkumar M. Kansara (2004), Departamento de Ingeniería Civil del Instituto Politécnico de Virginia, realizó la tesis de investigación Development of Membrane, Plate and Flat Shell Elements in Java para obtener el Master de Ciencias, donde hace referencia a la creación de un programa realizado en Java, haciendo uso de un Elemento Finito de Cascara de 3 y 4 nodos.

## **2.2 Bases teóricas**

### **2.2.1 Elasticidad**

Elasticidad es el término con el que se hace referencia al comportamiento de los cuerpos que recuperan su forma original, después de haberse sometido a una deformación producto de un conjunto de fuerzas que se suprimen. Este comportamiento es válido siempre y cuando sea el caso en el que dichas fuerzas, no hayan sobrepasado un cierto límite establecido para cada tipo de material.

En el caso de un cuerpo sometido a un conjunto de fuerzas externas que provean un estado elástico, es lógico suponer la presencia de fuerzas internas distribuidas en el interior del cuerpo, que a su vez son consecuencia de los cambios de forma que ha experimentado el cuerpo. Esfuerzos y deformaciones son los términos usados para referirnos a las fuerzas internas y a los cambios de forma, respectivamente.

#### ***2.2.1.1 Estado de esfuerzos***

A continuación se presentan dos estados, el primer estado corresponde a un estado, que permitirá comprender el concepto de estado de esfuerzos, seguidamente se presenta un estado general de esfuerzos.

**a. Estado unidimensional de esfuerzos**

Se llama Esfuerzo a la distribución de fuerzas ejercidas sobre un área cualquiera, y que en términos simples puede expresarse bajo la siguiente ecuación:

$$\sigma = \frac{P}{A} \dots\dots\dots \text{Ecuación (1)}$$

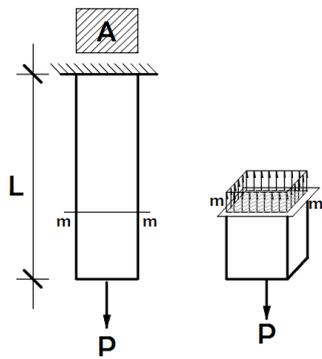


Figura 1. Estado unidimensional de esfuerzos

Esta última expresión se presenta en forma gráfica en el corte m-m de la Figura 1, en la que para establecer el equilibrio del sistema, la sumatoria de fuerzas internas que actúan en el corte debe ser igual a la fuerza externa  $P$  que actúa en la parte inferior. Entonces la denominación de Esfuerzo se concede a la sumatoria de fuerzas distribuidas que da como resultado una magnitud  $P$  actuando sobre un área  $A$ .

**b. Estado tridimensional de esfuerzos**

Consideremos el caso de un pequeño elemento cubico, que se encuentra dentro de un cuerpo sometido a un conjunto de fuerzas con componentes en las direcciones  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ . Dicho elemento se presenta en la Figura 2, en el cual se muestra las direcciones positivas para un estado de esfuerzos, que siguen las direcciones de los ejes positivos  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ .

Puede notarse que por cada cara del elemento cubico se presenta un Esfuerzo Normal (que viene acompañado de un subíndice que indica la dirección en la que actúa) y dos Esfuerzos cortantes (acompañados de dos subíndices en el que el primero indica la cara perpendicular a la dirección del esfuerzo y el segundo subíndice corresponde a la dirección misma del esfuerzo).

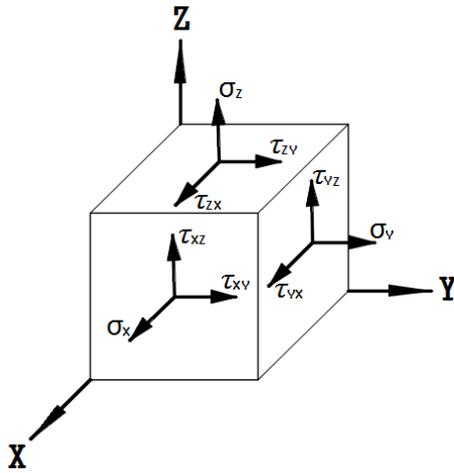


Figura 2. Estado tridimensional de esfuerzos

El número de componentes que se presenta en las caras visibles son nueve en total, y corresponden a tres esfuerzos normales  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  y seis esfuerzos cortantes  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ .

Es posible demostrar que a partir de realizar el equilibrio, el número de componentes de esfuerzo cortante puede ser reducido a tres, obteniéndose como resultado las siguientes igualdades:

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad \dots \dots \dots \text{Ecuación (2)}$$

Con lo cual, el número de componentes de esfuerzo se redujo a seis.

### 2.2.1.2 Estado elástico de deformación

Se llama estado elástico de deformación a los cambios en tamaño y geometría de un cuerpo sometido a fuerzas que no sobrepasan un cierto límite establecido para cada material, pudiendo ser cambios angulares o cambios en una longitud considerada.

En lo siguiente se pasara a revisar conceptos que poseen relación estrecha con Deformación, estos conceptos sin duda alguna son de mayor utilidad para el método de elementos finitos y se denominan Deformación Unitaria y Deformación Angular, que a diferencia de las deformaciones, estos establecen una característica para cualquier tipo de sistema, sin importar las dimensiones que se presenten.

#### a. Estado elástico unidimensional de deformación

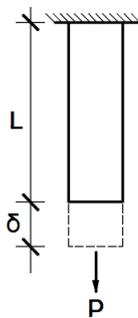


Figura 3. Ejemplo de un estado unidimensional de deformación constante

Se llama Deformación Unitaria al cambio en dimensión que se produce en un cuerpo con relación a su longitud original, por tanto, puede expresarse esta definición bajo la siguiente ecuación:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{L} \dots\dots\dots \text{Ecuación (3)}$$

La anterior relación se presenta en forma gráfica en la Figura 3 y sin duda alguna esta expresión solo es posible utilizarla cuando se tiene un estado de deformación constante para un estado de esfuerzos constantes como el que se muestra en la Figura 1, por ello, cuando esta condición no se cumpla se tiene que recurrir a una ecuación que posea un carácter general y que sea de mayor utilidad.

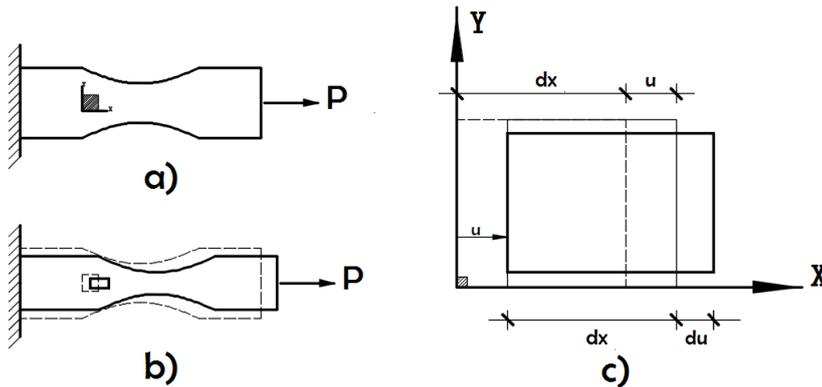


Figura 4. Estado unidimensional de deformación general

Por otra parte la Figura 4 (a) muestra un problema que presentara variaciones de esfuerzos en la dirección longitudinal debido a la sección trasversal variable que posee. Para establecer el estado de deformación se tomara un elemento diferencial de estudio como el que se encuentra sombreado.

La Figura 4 (b) presenta la deformación producida para todo el problema, como también la deformación producida para el elemento diferencial de estudio, el mismo que se presenta ampliado en la Figura 4 (c).

La figura ampliada muestra al elemento en su posición inicial con línea punteada, y con dimensión  $dx$  que hace referencia a la longitud infinitesimal del elemento de estudio en la dirección longitudinal, denominada como diferencial de  $x$ .

En primer lugar el elemento se desplaza una cantidad  $u$  con un movimiento que no produce ningún tipo de deformación (movimiento de sólido rígido), siendo este un movimiento inherente de cualquier cuerpo y es esbozado con línea fina. En seguida el elemento sufre una deformación  $du$  que representa un incremento del desplazamiento  $u$ , el cual es esbozado con línea gruesa.

Entonces de la definición ya expuesta, se desprende para este problema general que la deformación unitaria es la relación entre la deformación  $du$  con respecto a su longitud original  $dx$  y se expresa mediante la siguiente ecuación general:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} \dots\dots\dots \text{Ecuación (4)}$$

Esta ecuación como se mencionó posee un carácter general debido a que al tratar con un elemento de estudio bastante pequeño, el estado de deformación y la distribución de esfuerzos se presenta de forma constante dentro del mismo. Nótese también que a esta última ecuación se agregó un subíndice  $x$  al término epsilon  $\varepsilon$  para denotar que la deformación unitaria se produjo en la dirección de la coordenada  $X$ .

Por otra parte desde el punto de vista del Cálculo Matemático, la ecuación (4) se presenta con derivadas de la función  $u$  debido a que presentara valores en función a una sola variable por tener carácter unidimensional, en cambio para un caso tridimensional de deformación, la función  $u$  estará compuesta de 2 o más variables, teniéndose que hacerse uso de derivadas parciales como se verá más adelante.

Si se quisiera ver al desplazamiento  $du$  de la Figura 4 (c) en función de la deformación unitaria  $\varepsilon_x$ , se tendría que despejar dicho término de la ecuación (4). Esta forma de expresar al desplazamiento  $du$  será de utilidad para comprender el siguiente apartado, que presentara un gráfico similar al siguiente:

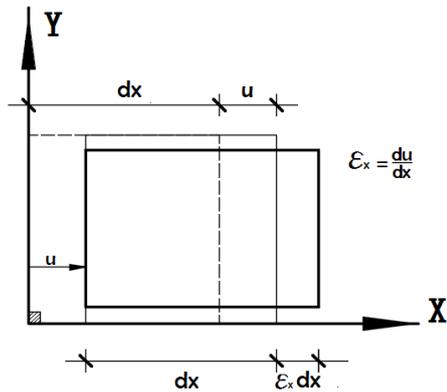


Figura 5. Estado unidimensional de deformación general en función a deformación unitaria

### ***b. Estado elástico tridimensional de deformación***

Considérese un problema bidimensional como el que se presenta en la Figura 6 (a), este problema se encuentra restringido en los contornos izquierdo e inferior y está sujeto a dos cargas distribuidas de intensidad  $W$  en las direcciones mostradas. Para establecer el estado de deformación se utilizara un elemento diferencial de estudio como el que se encuentra sombreado.

En la Figura 6 (b) se presenta la deformación producida para todo el problema como también la deformación producida para el elemento diferencial de estudio, ampliado en la Figura 6 (c).

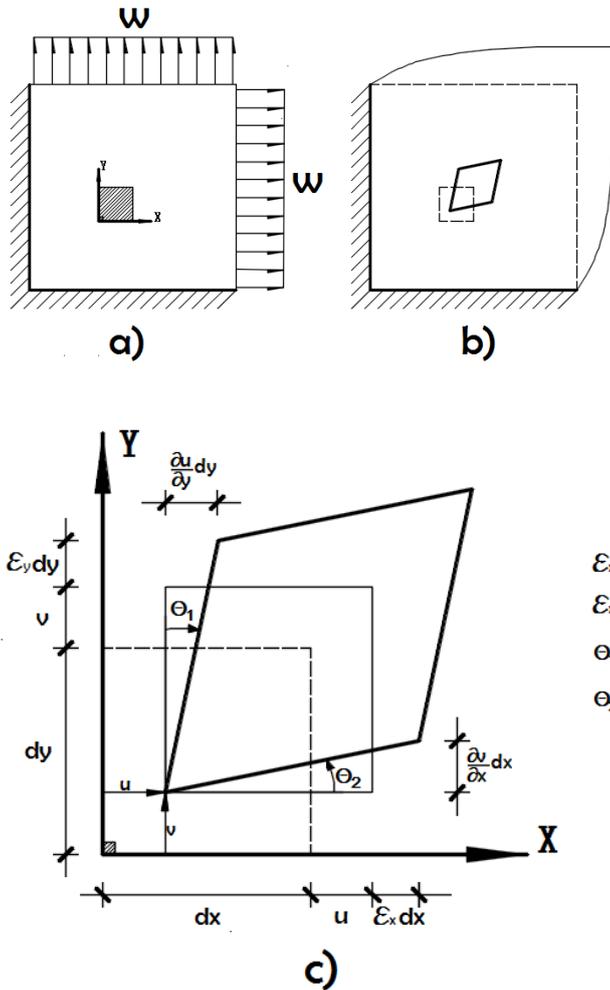


Figura 6. Estado bidimensional de deformación general

La figura ampliada presenta al elemento en su posición inicial con línea punteada, el mismo que posee dimensiones  $dx$  y  $dy$ . En primer lugar el elemento se desplaza con cantidades  $u$  y  $v$  que no producen ningún tipo de deformación (movimiento de sólido rígido), siendo este un movimiento inherente de cualquier cuerpo, y es esbozado con línea fina. En seguida el elemento se somete a las deformaciones  $\epsilon_x dx$  y  $\epsilon_y dy$ , teniéndose así la deformación esbozada con línea gruesa.

La Figura 6 (c) muestra las deformaciones que se producen en términos de las deformaciones unitarias  $\epsilon_x$  y  $\epsilon_y$  de manera similar a lo mostrado en la Figura 5.

La diferencia entre ambas figuras puede ser vista a partir de la deformación unitaria en la dirección  $X$  debido a lo siguiente:

Si la equivalencia de  $\varepsilon_x$  en la ecuación (4) es reemplazado en la Figura 5, se obtendrá la deformación  $du$  después de cancelarse los términos  $dx$ . En cambio si la equivalencia de  $\varepsilon_x$  mostrado en la Figura 6 (c) es reemplazado en la misma figura no se podrá realizar la cancelación de términos y se obtendrá la siguiente deformación:

$$\frac{\partial u}{\partial x} dx \dots\dots\dots \text{Ecuación (5)}$$

Esta última expresión produce el incremento de la función  $u$  que genera un cambio de la coordenada en  $X$ .

Como se mencionó en la sección Estado elástico unidimensional de deformación, la ecuación (5) presenta derivadas parciales de la función de desplazamientos  $u$ , debido a que será dependiente de dos variables para un caso bidimensional y tres variables para el caso tridimensional. Es por tanto que al tenerse términos de diferenciación diferente tanto en el numerador como en el denominador, la cancelación de términos no podrá ser efectuada.

La misma secuencia lógica es aplicable a la deformación en la dirección  $Y$  y es posible demostrar que las expresiones finales para las deformaciones unitarias en un caso tridimensional, son las que se visualizan en el juego de ecuaciones (9).

La Figura 6 (c), también muestra una deformación en ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , los mismos que darán origen al concepto de Deformación Angular. En esta figura se

aprecia que cada punto del lateral izquierdo viene incrementando la función  $u$  conforme se asciende en la dirección  $Y$ , lo cual genera un cambio del lateral de dimensión  $dy$ , esta definición se aprecia en la figura mencionada y se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u}{\partial y} dy \dots\dots\dots \text{Ecuación (6)}$$

Debido a que los cálculos antes efectuados se realizan bajo la hipótesis de Desplazamientos Pequeños, se hará uso del concepto de longitud de curva, que para hallar los ángulos se despeja esta expresión y reemplazando se obtiene:

$$\theta_1 = \frac{S}{R} = \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \dots\dots\dots \text{Ecuación (7)}$$

Esta expresión establece el ángulo  $\theta_1$ , y de la misma manera se obtendrá el ángulo  $\theta_2$ .

Como se mencionó, la suma de los dos ángulos definirá la expresión para la deformación angular en el plano  $XY$  y se expresa de la siguiente manera.

$$\gamma_{xy} = \theta_1 + \theta_2 \dots\dots\dots \text{Ecuación (8)}$$

La misma secuencia lógica es aplicable a las deformaciones angulares restantes de los planos que corresponden a un caso tridimensional, pudiendo demostrarse que las expresiones finales para las deformaciones angulares en dicho estado, son las que se visualizan en el juego de ecuaciones (9).

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \dots\dots\dots \text{Ecuación (9)} \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se puede conocer la deformación unitaria y angular de cualquier dirección de interés dentro del elemento de análisis.

**2.2.1.3 Relación esfuerzo – deformación (Ley de Hooke)**

**a. Relación esfuerzo – deformación en un estado unidimensional**

Robert Hooke en 1678 realizó estudios que consistían en someter a distintos tipos de elementos prismáticos a ciertas extensiones unidimensionales, logrando a partir de ello demostrar una relación lineal entre fuerzas y deformaciones que se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$\delta = \frac{PL}{EA} \dots\dots\dots \text{Ecuación (10)}$$

Esta expresión establece que la deformación  $\delta$  de un elemento es directamente proporcional a la longitud  $L$  y la carga  $P$  (que la lleva al estado deformado) e inversamente proporcional al módulo de elasticidad  $E$  y al área  $A$ .

Despejando la carga  $P$  de la ecuación (10), haciendo uso de la ecuación (3) y reemplazándola en la ecuación (1), se obtiene la siguiente expresión:

$$\sigma = E\varepsilon \dots\dots\dots \text{Ecuación (11)}$$

Que establece la relación entre el esfuerzo y la deformación unitaria en un estado unidimensional.

La ecuación (11) puede ser escrita en forma matricial y es claro que en realidad no tendría ningún sentido expresarla de esa manera, debido a que los términos que la componen son escalares y pueden multiplicarse como tales. El motivo de expresarla de esa manera se debe a que se definirá un nuevo término para uso común, entonces reescribiéndola se tiene:

$$[\sigma] = [E][\varepsilon] \dots\dots\dots \text{Ecuación (12)}$$

Y a partir de esta última expresión a cualquier matriz que se encuentre en función de las propiedades del material, en lo sucesivo se le denominara Matriz Constitutiva que para el caso de la ecuación (12) la matriz  $[E]$  contiene el módulo de elasticidad que determina una de las propiedades del material.

***b. Relación esfuerzo – deformación en un estado tridimensional***

Las investigaciones de Robert Hooke dieron como fruto relaciones tridimensionales entre esfuerzos y deformaciones y vienen expresadas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \\ \sigma_y &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right] \\ \sigma_z &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_x) \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{yz} \end{aligned} \dots\dots\dots \text{Ecuación (13)}$$

Estas ecuaciones de relación pueden ser presentadas en forma matricial y forma compacta de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad \text{Ecuación (14)}$$

Como se mencionó, esta relación puede ser escrita en la forma compacta siguiente:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \quad \text{Ecuación (15)}$$

Donde  $[D]$  es la Matriz Constitutiva que depende de las propiedades del material.

**c. Relación esfuerzo – deformación en un estado bidimensional**

Si se desea dar solución a un problema que implica condiciones bidimensionales, puede hacerse uso de una simplificación del Estado Tridimensional, pudiéndose obtener dos tipos de casos siguientes para un plano de trabajo  $XY$  :

- **Esfuerzo plano**

Se dice que una estructura se encuentra en el caso de esfuerzo plano cuando el espesor del elemento no tiene comparación con las demás dimensiones que la componen, y puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (16)}$$

Utilizando la forma compacta se tiene:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \dots\dots\dots \text{Ecuación (17)}$$

Donde,  $[D]$  es la Matriz Constitutiva que depende de las propiedades del material.

• **Deformación plana**

Se dice que una estructura se encuentra en el caso de Deformación en el Plano cuando el espesor del elemento si tiene comparación con las demás dimensiones que la conforman y puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (18)}$$

Utilizando la forma compacta, se tiene:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \dots\dots\dots \text{Ecuación (19)}$$

Donde nuevamente,  $[D]$  es la Matriz Constitutiva que depende de las propiedades del material.

### 2.2.2 Trabajo y Energía

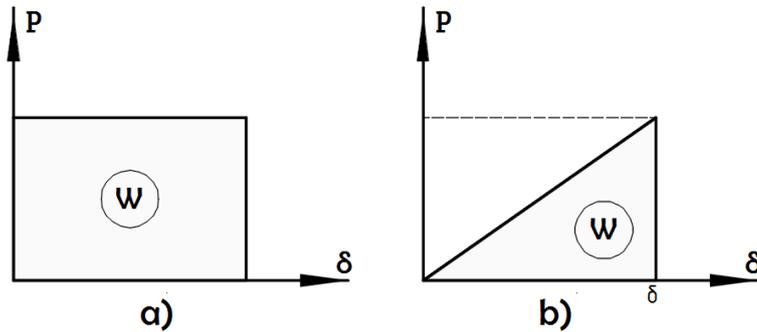


Figura 7. Trabajo de una fuerza constante y una fuerza incremental

Es posible definir al Trabajo como la deformación que produce una fuerza sobre un cuerpo, y a partir de esta definición se puede expresar al trabajo para el ejemplo de la Figura 7 en forma simple mediante la siguiente ecuación:

$$W = P \delta \dots\dots\dots \text{Ecuación (20)}$$

Esta expresión de Trabajo es solo valida cuando la magnitud de  $P$  es constante durante todo el proceso de deformación y representa el área sombreada de la Figura 7 (a).

Para el caso de un comportamiento elástico lineal en el que la carga  $P$  se incrementa de manera gradual, la expresión del trabajo se puede verificar a partir del área sombreada de la Figura 7 (b) que muestra el historial de deformación producida por los incrementos de carga, en la que se aprecia la dependencia del trabajo en función de la deformación total  $\delta$ , teniéndose así:

$$W = \frac{1}{2} P \delta \dots\dots\dots \text{Ecuación (21)}$$

Durante el proceso de incrementos de carga, el elemento va deformándose y a la vez va almacenando o acumulando energía internamente.

Es ya conocido que la energía total de un sistema puede ser expresada en términos de energía cinética (que a su vez depende de la masa y velocidad) y energía potencial (que depende de la masa, de un campo gravitacional y de una distancia a partir de un punto de referencia). Entonces si el elemento incrementa la carga con velocidades pequeñas, la energía cinética simplemente se anula y la única componente de la energía total sería la energía potencial. Por otra parte la energía potencial al estar en términos de masa y de un campo gravitacional puede ser expresada en términos de fuerza, quedando así la energía total del sistema en función de unidades de fuerza y longitud, de manera muy similar al Trabajo.

A partir de las anteriores líneas puede afirmarse entonces que la energía que acumula internamente el sistema es igual al trabajo realizado externamente  $W_e$ , por tanto, si se expresa la energía interna con el símbolo  $W_i$  se tiene lo siguiente:

$$W_i = W_e = \frac{1}{2} P \delta \dots\dots\dots \text{Ecuación (22)}$$

Entonces puede denominarse a esta expresión como Energía de Deformación interna o Trabajo interno debido a que este es producto del trabajo externo que se absorbió.

**2.2.2.1 Conservación de la Energía**

La Conservación de la energía en términos simples establece lo siguiente: “la energía no se crea ni se destruye, solo se transforma”. Este enunciado expresado de forma simple es el que se refleja en la ecuación (22), en la que se estableció que el trabajo realizado externamente fue transformado en energía interna.

### 2.2.2.2 Principio de los Trabajos Virtuales

El principio de los trabajos virtuales (PTV) es una de las formas más eficientes de establecer el equilibrio en un sistema, y es utilizado con carácter general para la solución de problemas de equilibrio en el Análisis Estructural.

Si se tiene una estructura en un estado deformado producto de ciertas fuerzas exteriores y además se le impone un estado virtual deformado que produce desplazamientos virtuales en todo el sistema, este lograra el equilibrio solo si el trabajo producido por las fuerzas exteriores sobre los desplazamientos virtuales es igual al trabajo producido por las fuerzas internas (esfuerzos) sobre las deformaciones virtuales.

En el anterior párrafo y lo sucesivo del texto, solo se utilizara el termino Deformación para referirnos a las deformaciones unitarias y angulares presentadas en el juego de ecuaciones (9). Por consiguiente el anterior párrafo establece una descripción simple de la utilización de los trabajos virtuales que hace uso de la conservación de energía a través de la igualdad del trabajo interno y trabajo externo, expresándose de la manera siguiente:

$$W_i = W_e \dots\dots\dots \text{Ecuación (23)}$$

El trabajo interno entonces estará definido por un producto de esfuerzos  $[\sigma]$  y deformaciones virtuales  $[\bar{\epsilon}]$  y el trabajo externo estará definido por un producto de las fuerzas externas  $[f]$  y desplazamientos virtuales  $[\bar{U}]$ . Entonces el trabajo interno  $W_i$  y trabajo externo  $W_e$  tendrá una forma similar a lo mostrado en la ecuación (22) y se escriben en notación matricial compacta de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
W_i &= \frac{1}{2}[\bar{\varepsilon}]^T[\sigma] \\
W_e &= \frac{1}{2}[\bar{U}]^T[f]
\end{aligned}
\text{..... Ecuación (24)}$$

Si estos términos se introducen en la ecuación (23) del PTV y se supone que se está trabajando a nivel tridimensional, los componentes de ambos trabajos deberán integrarse en todo el volumen del sistema y se obtendrá la siguiente igualdad:

$$\int_V [\bar{\varepsilon}]^T [\sigma] dV = \int_V [\bar{U}]^T [f] dV \text{..... Ecuación (25)}$$

Los esfuerzos  $[\sigma]$  a nivel tridimensional fueron establecidos en la ecuación (15) y reemplazando en la ecuación (25) se obtiene:

$$\int_V [\bar{\varepsilon}]^T [D][\varepsilon] dV = \int_V [\bar{U}]^T [f] dV \text{..... Ecuación (26)}$$

La anterior expresión requiere del uso los desplazamientos virtuales  $[\bar{U}]$ , las deformaciones virtuales  $[\bar{\varepsilon}]$  y las deformaciones reales  $[\varepsilon]$ , siendo esta última obtenida del juego de ecuaciones (9) que pueden ser escritas en la siguiente forma matricial compacta:

$$[\varepsilon] = [\partial][U] \text{..... Ecuación (27)}$$

Donde  $[\partial]$  es un operador conveniente en derivadas parciales y  $[U]$  son los desplazamientos reales de cualquier punto interior al sistema, que se relación con los desplazamientos conocidos del sistema denominados  $[d]$  a través de unas funciones  $[N]$ , expresándose esto como:

$$[U] = [N][d] \text{..... Ecuación (28)}$$

Donde  $[N]$  se denomina matriz de funciones de interpolación para desplazamientos, entonces al reemplazar la ecuación (28) en la ecuación (27) se obtiene:

$$[\varepsilon] = [\mathcal{O}][N][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (29)}$$

Y si se sustituye por  $[B]$  al producto del operador  $[\mathcal{O}]$  con  $[N]$  se obtiene las deformaciones reales de la forma:

$$[\varepsilon] = [B][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (30)}$$

Donde  $[B]$  se denomina matriz de funciones de interpolación para deformaciones y es utilizada para relacionar las deformaciones virtuales  $[\bar{\varepsilon}]$  con los desplazamientos virtuales  $[\bar{d}]$  teniéndose así:

$$[\bar{\varepsilon}] = [B][\bar{d}] \dots\dots\dots \text{Ecuación (31)}$$

Los desplazamientos virtuales son análogos al que presenta la ecuación (28) y se escriben como:

$$[\bar{U}] = [N][\bar{d}] \dots\dots\dots \text{Ecuación (32)}$$

Por otra parte las ecuaciones (30), (31) y (32) serán reemplazadas en la ecuación (26), para obtener:

$$\int_V [B]^T [\bar{d}]^T [D] [B] [d] dV = \int_V [N]^T [\bar{d}]^T [f] dV \dots\dots\dots \text{Ecuación (33)}$$

Extrayendo el factor común que es la matriz de desplazamientos virtuales se obtiene:

$$[\bar{d}]^T \int_V [B]^T [D] [B] [d] dV = [\bar{d}]^T \int_V [N]^T [f] dV \dots\dots\dots \text{Ecuación (34)}$$

Esta relación es válida para cualquier desplazamiento virtual, por tanto, los términos que acompañan a  $[\bar{d}]^T$  pueden igualarse para establecer una nueva expresión del Principio de Trabajos Virtuales que se expresa como:

$$\int_V [B]^T [D] [B] [d] dV = \int_V [N]^T [f] dV \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (35)}$$

Esta última ecuación expresa el equilibrio y puede ser representada de la misma forma que la ley de Hook, teniéndose entonces:

$$[K][d] = [F] \quad \text{ó} \quad [F] = [K][d] \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (36)}$$

Dónde:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (37)}$$

$$[F] = \int_V [N]^T [f] dV \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (38)}$$

Siendo  $[K]$  la matriz de rigidez del sistema y  $[F]$  el vector de fuerzas equivalentes a cargas actuantes.

### 2.2.3 Análisis matricial de estructuras

“El análisis matricial puede ser descrito a partir de dos ventajas en el cálculo de estructuras. Desde el punto de vista teórico, permite utilizar métodos de cálculo de una forma compacta, precisa y, al mismo tiempo, completamente general. Esto facilita el tratamiento de la teoría de estructuras como unidad, sin que los principios fundamentales se vean oscurecidos por operaciones de cálculo, por un lado, o por diferencias físicas entre estructuras, por otro lado.

Desde el punto de vista práctico el análisis matricial proporciona un sistema apropiado de análisis de las estructuras y determina una base muy conveniente para el desarrollo de programas de computadores” (Ottazzi, 2010, pág. 5).

“En contraste con estas ventajas, debe admitirse que los métodos matriciales se caracterizan por una gran cantidad de cálculo sistemático, y su valor en el cálculo práctico de estructuras se basa en la adecuación de los computadores para llevar el trabajo numérico” (Ottazzi, 2010, pág. 5).

#### **2.2.4 El método de elementos finitos**

“Antes del desarrollo del Método de los Elementos Finitos, los investigadores del campo de la ingeniería estructural y de la mecánica estructural encontraron soluciones de “forma cerrada” en términos de conocidas funciones matemáticas de muchos problemas en la mecánica continua. Sin embargo, estructuras prácticas de geometría arbitraria, no-homogéneas o estructuras fabricadas de varios materiales diferentes son difíciles de solucionar mediante este enfoque clásico” (Wilson, 2008, pág. 28).

“Este método determina el comportamiento de una estructura ante las cargas, sustituyendo la solución continua, exacta y en la mayoría de los casos imposible del sistema de ecuaciones diferenciales que conforman el problema elástico por una solución discontinua o discreta y, por tanto, aproximada” (Vásquez & López, 2001, pág. 31).

“Con excepción de las estructuras de barras, la mayor parte de las estructuras en ingeniería son de naturaleza continua y, por tanto, su comportamiento no puede expresarse en forma precisa en función de un número pequeño de variables discretas” (Oñate, 1991, pág. 21).

“El método de los elementos finitos es hoy en día el procedimiento más potente para el análisis de estructuras de carácter uni, bi o tridimensional sometidas a las acciones exteriores más diversas. La gran analogía existente entre los conceptos del análisis matricial de estructuras de barras y los del método de los elementos finitos facilitan en gran manera el estudio de éste a los técnicos con dominio de las ideas sobre el cálculo matricial de estructuras” (Oñate, 1991, págs. 21,22).

“Son muchas las facetas de la ingeniería en las que se precisa determinar la distribución de tensiones y deformaciones en un continuo elástico. Los casos particulares de dichos problemas pueden variar desde problemas bidimensionales de tensión o deformación plana, sólidos de revolución y flexión de placas y láminas, hasta el análisis más general de sólidos tridimensionales” (Zienkiewicz & Taylor, 1994, pág. 21).

El método consiste fundamentalmente en (Zienkiewicz & Taylor, 1994, págs. 21,22):

- a. El continuo se divide, mediante líneas o superficies imaginarias, en un número de “elementos finitos”.

- b. Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, que llamaremos nodos, situados en sus contornos. Los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema, tal como ocurre en el análisis simple de estructuras.
- c. Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada “elemento finito” en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.
- d. Estas funciones de desplazamientos definirán entonces de manera única el estado de deformaciones dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales, estas deformaciones, junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material, definirán el estado de tensiones en todo el elemento y, por consiguiente, también en sus contornos.
- e. Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualesquiera cargas repartidas, resultando así una relación entre fuerzas y desplazamientos.

Algunos sistemas utilizando modelos de elementos finitos son mostrados en las siguientes figuras:

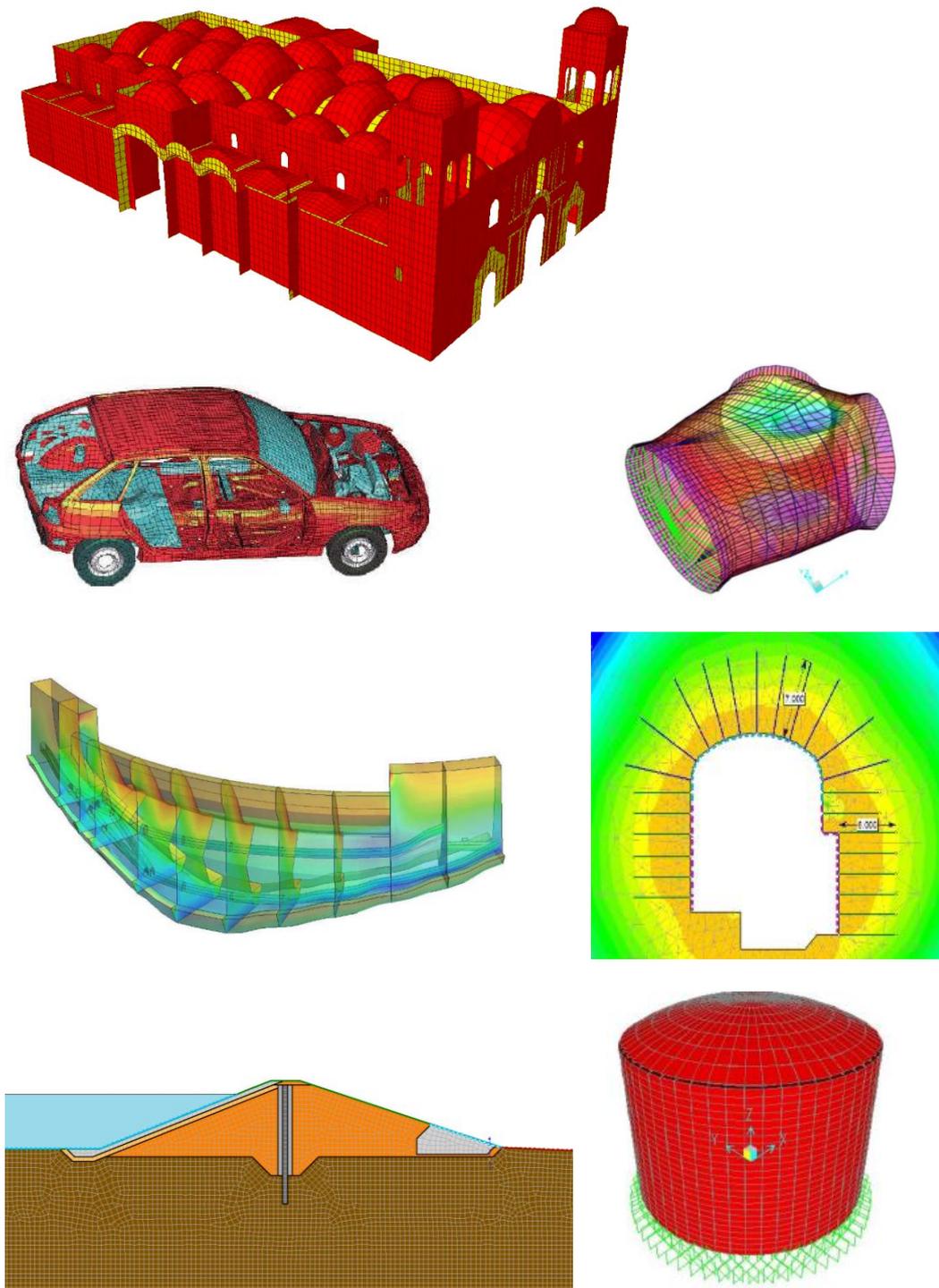


Figura 8. Ejemplos de estructuras que utilizan el método de elementos finitos

Podrá notarse que en cada una de las estructuras se discretizo el continuo, en una cierta cantidad de elementos finitos bidimensionales o tridimensionales.

## **2.3 Definición de términos**

### **2.3.1 Programas que utilizan el método de elementos finitos**

Actualmente los programas que utilizan el método de elementos finitos poseen las siguientes herramientas:

- Opciones de mallado automático.
- Modificación de geometrías.
- Se permite la conexión entre elementos tipo línea y elementos tipo área.
- Admiten cualquier cantidad de etapas de construcción.
- Representación gráfica de contornos de desplazamientos.
- Representación gráfica de la distribución de esfuerzos inducidos.

### **2.3.2 Sistema discreto**

Es un concepto utilizado en la Ingeniería estructural para reconocer si una estructura posee una cantidad finita de elementos que se puedan reconocer rápidamente.

### **2.3.3 Sistema continuo**

Este concepto hace referencia a que no es posible la contabilización de elementos que conforman una estructura.

## **CAPÍTULO III**

### **MÉTODO**

#### **3.1 Tipo de investigación**

Por el tipo de investigación, el estudio reúne las condiciones necesarias para ser denominada como una investigación aplicada, la misma que busca la aplicación o utilización del método de elementos finitos para obtener consecuencias prácticas como la de solucionar problemas que implican sistemas tales como túneles.

#### **3.2 Diseño de la investigación**

La investigación será de carácter experimental debido a que se manipulara intencionalmente la variable independiente, al formularse y observar el comportamiento de cada uno de los tipos de elementos finitos que utilizan los programas SAP2000 y Phase2.

#### **3.3 Población y muestra**

La Población son todas las estructuras analizadas por el método de elementos finitos. Así mismo se tendrá las siguientes muestras escogidas en base al criterio de aseguramiento de generalización o extrapolación a la población:

### **3.3.1 Muestra N°1: Vigas en Voladizo sujetas a cargas de corte.**

Esta muestra se escogió para corroborar la igualdad de resultados del cálculo manual con los resultados del cálculo computacional.

### **3.3.2 Muestra N°2: Túnel de Conducción de sección en Herradura.**

Esta muestra se escogió para realizar el análisis tensional de un túnel de conducción, por el método de elementos finitos.

## **3.4 Descripción de instrumentos para recolección de datos.**

### **3.4.1 Programas computacionales.**

*a. SAP2000* es un programa comercial de cálculo de estructuras basado en el Método de los Elementos Finitos (MEF) con interfaz gráfica en 3D, preparado para realizar, de forma totalmente integrada, la modelación, análisis y dimensionamiento del más amplio conjunto de problemas de ingeniería de estructuras. El origen de su nombre viene de sus siglas en inglés de Structural Analysis Program (Programa de Análisis Estructural)

Este programa será utilizado para extraer los resultados del análisis de vigas en voladizo mediante el método de elementos finitos, y compararlos con los resultados de un cálculo manual.

*b. Phase2* es un poderoso programa en 2D para análisis de elementos finitos y análisis de tensiones para excavaciones subterráneas o de superficie en roca o suelo. El software puede ser utilizado para una amplia gama de proyectos de ingeniería y diseño, e incluye soporte a la estabilidad de taludes, infiltración de aguas subterráneas y análisis probabilístico.

Este programa será utilizado para extraer los resultados del análisis de vigas en voladizo mediante el método de elementos finitos, y compararlos con los resultados de un cálculo manual. Además de ser utilizado para verificar el estado tensional del macizo rocoso de un túnel en sección herradura.

*c. Excel.* Microsoft Excel cuenta con opciones importantes a la hora de evaluar resultados y estructurar aplicaciones, así como permite realizar cálculos simples y complejos con sus funciones de categorías predeterminadas y personalizadas.

Este programa será utilizado elaborar diagramas de barras, diagramas de dispersión, etc.

### **3.4.2 Cuadros Comparativos.**

Los cuadros comparativos son organizadores de información, que permiten identificar las semejanzas y diferencias de dos o más objetos o eventos.

### **3.4.3 Diagramas de Dispersión.**

Este es un tipo de diagrama matemático que utiliza las coordenadas cartesianas para mostrar los valores de dos variables, para un conjunto de datos.

## CAPÍTULO IV

### DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

#### 4.1 Elemento finito bidimensional de tres nodos

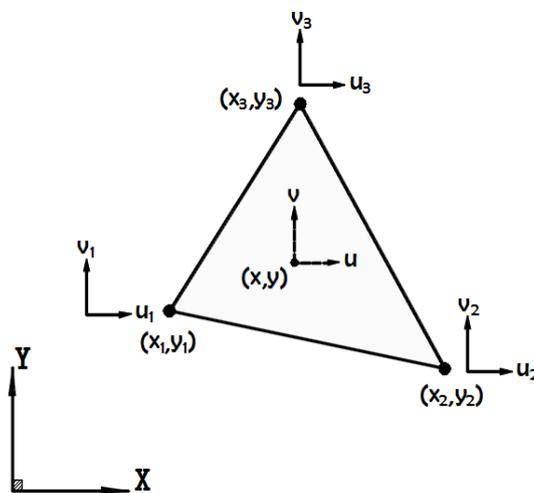


Figura 9. Elemento finito bidimensional de tres nodos

El elemento finito bidimensional de 3 nodos cumple un importante rol dentro del desarrollo del método de elementos finitos, y posee un importante valor histórico debido a que fue uno de los primeros elementos utilizados para realizar el análisis y diseño de muchas estructuras realizadas a partir de la década de los sesentas.

En la actualidad el elemento de tres nodos es incorporado en diversos programas de computadora debido a su alta versatilidad para generar geometrías complicadas, además de la rapidez con la que se solucionan problemas diversos debido a la pequeña cantidad de cálculos que se deben desarrollar.

Debido a lo antes descrito, su desarrollo representara un buen punto de partida para conocer la formulación del método de elementos finitos a nivel bidimensional.

#### 4.1.1 Funciones de desplazamiento

La Figura 9 presenta un elemento finito que forma parte de un sistema continuo, y que podría obtener un movimiento en función a los desplazamientos nodales  $u_1, u_2, u_3$  para la dirección  $X$  y  $v_1, v_2, v_3$  para la dirección  $Y$ . Por otra parte, si se quisiera conocer los desplazamientos  $u, v$  de un punto interior al elemento, sería necesario encontrar una función en base a los movimientos nodales.

##### 4.1.1.1 Elección del polinomio de la función de desplazamiento

La elección de una función de desplazamientos o ecuación de movimientos implica utilizar un polinomio de desplazamientos para cada dirección. Este polinomio puede ser obtenido a través del Triángulo de Pascal presentado en la Figura 10.

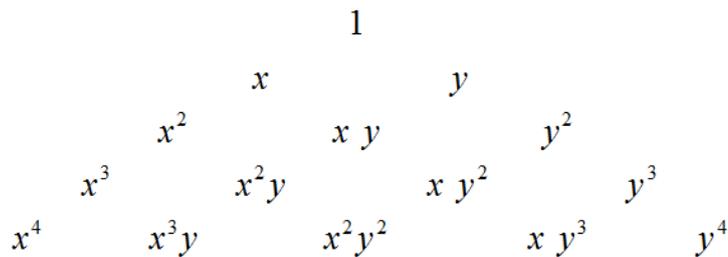


Figura 10. Triángulo de Pascal

El número de variables a tomar del Triángulo de Pascal es igual al número de grados de libertad que presenta el elemento para cada dirección. En la Figura 9, se aprecia 3 grados de libertad para cada dirección, lo cual implica tomar

los 3 primeros valores del Triángulo de Pascal, para formar una función lineal de desplazamientos que puede ser expresada como:

$$\begin{aligned} u &= a + bx + cy \\ v &= d + ex + fy \end{aligned} \dots\dots\dots \text{Ecuación (39)}$$

$u$  y  $v$  son las funciones de desplazamiento para la dirección  $X$  e  $Y$  respectivamente y  $a, b, c, d, e, f$  son constantes a calcular.

**4.1.1.2 Cálculo de constantes**

Para la dirección  $X$ , la función de desplazamientos  $u$  posee las constantes  $a, b, c$ , que requiere de 3 ecuaciones para poder conocerlas. Es posible obtener las constantes debido a que se cuenta con 3 datos conocidos como son los desplazamientos nodales  $u_1, u_2, u_3$  con sus respectivas coordenadas  $x$  e  $y$  que se visualizan en la Figura 9, con lo que se tendría:

$$\begin{aligned} u_1 &= a + bx_1 + cy_1 \\ u_2 &= a + bx_2 + cy_2 \\ u_3 &= a + bx_3 + cy_3 \end{aligned} \dots\dots\dots \text{Ecuación (40)}$$

Con estas 3 ecuaciones, será posible encontrar las incógnitas  $a, b, c$ , luego de resolver el sistema de ecuaciones, para ello, es conveniente expresarlas en la forma matricial siguiente:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (41)}$$

Despejando el vector de incógnitas se obtendría lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (42)}$$

Nótese que esta expresión implica la inversión de la matriz que contiene las coordenadas del elemento, y que al desarrollarla se obtendría:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & -(x_1 y_3 - x_3 y_1) & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ -(y_3 - y_2) & y_3 - y_1 & -(y_2 - y_1) \\ x_3 - x_2 & -(x_3 - x_1) & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (43)}$$

En este resultado el término  $A$  es el área del elemento y se calcula como:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (44)}$$

Finalmente el producto matricial de la ecuación (43) después de haber calculado el área, proporcionara las constantes que deberán ser reemplazadas en la función de desplazamientos, estas son:

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2)u_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1)u_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)u_3] \\ b &= \frac{1}{2A} [-(y_3 - y_2)u_1 + (y_3 - y_1)u_2 - (y_2 - y_1)u_3] \\ c &= \frac{1}{2A} [(x_3 - x_2)u_1 - (x_3 - x_1)u_2 + (x_2 - x_1)u_3] \dots\dots\dots \text{Ecuación (45)} \end{aligned}$$

#### **4.1.1.3 Expresión final de las funciones de desplazamiento**

Las expresiones finales de las funciones de desplazamiento son obtenidas una vez que se reemplazan las constantes encontradas. A partir de estas funciones se podrá obtener el desplazamiento de cualquier punto interior al elemento finito de 3 nodos tal como se verá en los siguientes párrafos.

Resulta evidente que si se realiza el mismo procedimiento para la dirección  $Y$  se obtendrá para las constantes  $d, e, f$  expresiones idénticas a las encontradas para las constantes  $a, b, c$ , debido a que se hará uso de la misma

inversión de la matriz que se encuentra en función de las coordenadas  $x$  e  $y$  de cada nodo.

Entonces reemplazando las constantes  $a, b, c$ , del juego de ecuaciones (45) en la función de desplazamientos  $u$  del juego de ecuaciones (39) se tendrá lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) u_1 - (x_1 y_3 - x_3 y_1) u_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) u_3] \\
 & + \frac{1}{2A} [-(y_3 - y_2) u_1 + (y_3 - y_1) u_2 - (y_2 - y_1) u_3] x \\
 & + \frac{1}{2A} [(x_3 - x_2) u_1 - (x_3 - x_1) u_2 + (x_2 - x_1) u_3] y
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots \text{Ecuación (46)}$$

Ordenando convenientemente la expresión anterior para ser expresada en función de los desplazamientos nodales se tendría:

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (y_3 - y_2) x + (x_3 - x_2) y] u_1 \\
 & + \frac{1}{2A} [-(x_1 y_3 - x_3 y_1) + (y_3 - y_1) x - (x_3 - x_1) y] u_2 \\
 & + \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) - (y_2 - y_1) x + (x_2 - x_1) y] u_3
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots \text{Ecuación (47)}$$

Puede notarse que esta expresión (47) puede ser simplificada si se realiza una sustitución conveniente de los valores que acompañan a los desplazamientos nodales, a través de los términos  $N_1, N_2, N_3$ , que la expresarían de la siguiente manera:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 \dots\dots\dots \text{Ecuación (48)}$$

Y por consiguiente:

$$\begin{aligned}
 N_1 = & \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) - (y_3 - y_2) x + (x_3 - x_2) y] \\
 N_2 = & \frac{1}{2A} [-(x_1 y_3 - x_3 y_1) + (y_3 - y_1) x - (x_3 - x_1) y] \\
 N_3 = & \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) - (y_2 - y_1) x + (x_2 - x_1) y]
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots \text{Ecuación (49)}$$

Los procedimientos anteriores resultan netamente matemáticos, y la ecuación (48) puede entenderse como:

- a. Cualquier desplazamiento  $u$  interior al elemento en la dirección  $X$  se encuentra dependiente de los desplazamientos  $u_1, u_2, u_3$  de los 3 nodos que conforman al elemento.
- b. Se denomina funciones de interpolación a los valores obtenidos de  $N_1, N_2, N_3$ , debido a que cada uno de ellos rescata una parte de cada desplazamiento nodal para poder encontrar el desplazamiento de un punto cualquiera que se encuentre interior al elemento.

Como se mencionó en párrafos anteriores, las constantes  $d, e, f$  del desplazamiento  $v$  son idénticas a las constantes del desplazamiento  $u$ , debido a que el cálculo de estas estarán en función de las coordenadas  $x$  e  $y$  de cada nodo, por ello la expresión del desplazamiento  $v$  para la dirección  $Y$  quedaría también expresado como:

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 \dots\dots\dots \text{Ecuación (50)}$$

Por otra parte es conveniente expresar las ecuaciones (48) y (50) en forma matricial, para obtener lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (51)}$$

Y utilizando una expresión compacta se tendría:

$$[U] = [N][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (52)}$$

Esta expresión compacta establece la relación que tiene el desplazamiento  $[U]$  con los desplazamientos nodales  $[d]$ , a través de las funciones de interpolación  $[N]$  de un punto interior cualquiera del elemento.

#### 4.1.2 Relación deformación - desplazamiento

Es lógico suponer, que si se cuenta con los desplazamientos, las deformaciones unitarias requeridas para el cálculo de esfuerzos, podrían ser rápidamente calculadas. Por ello, si utilizamos el estado de deformaciones para un caso bidimensional, presentado en la Figura 6, podrá notarse que es necesario rescatar las deformaciones a utilizar para el plano  $XY$  del juego de ecuaciones (9), teniéndose:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \dots\dots\dots \text{Ecuación (53)}$$

Estas relaciones pueden ser expresadas en la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (54)}$$

Y que utilizando una forma compacta se tendría:

$$[\varepsilon] = [\partial][U] \dots\dots\dots \text{Ecuación (55)}$$

Donde  $[\partial]$  es un operador conveniente en derivadas parciales que establece la relación la relación que tienen las deformaciones  $[\varepsilon]$  con los

desplazamientos  $[U]$  de un punto cualquiera interior al elemento finito, para ello el operador  $[\mathcal{D}]$  se expresa como:

$$[\mathcal{D}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (56)}$$

Por otra parte los desplazamientos  $[U]$  fueron establecidos mediante la ecuación (52), y reemplazándola en la ecuación (55) se tendría las deformaciones unitarias del elemento en la siguiente forma compacta:

$$[\mathcal{E}] = [\mathcal{D}][N][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (57)}$$

Es posible expresar al producto del operador  $[\mathcal{D}]$  y las funciones de forma  $[N]$  a partir de una matriz  $[B]$ , para tenerse:

$$[B] = [\mathcal{D}][N] \dots\dots\dots \text{Ecuación (58)}$$

De este modo la ecuación (57) se reescribe como:

$$[\mathcal{E}] = [B][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (59)}$$

Esta última expresión establece la relación entre deformaciones  $[\mathcal{E}]$  y desplazamientos  $[d]$ , a través de la Matriz  $[B]$ , denominada como matriz de funciones de interpolación de deformaciones y que se obtiene reemplazando la ecuación (56) y la matriz de funciones de interpolación  $[N]$  en la ecuación (58), para obtener el siguiente producto matricial:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (60)}$$

Si se hace efectivo dicho producto matricial, se tendría:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_3}{\partial y} & \frac{\partial N_3}{\partial x} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (61)}$$

Que requiere de derivar parcialmente a las funciones de interpolación presentadas en el juego de ecuaciones (49), y para ello a continuación se presenta esta última matriz  $[B]$  que contiene el desarrollo de las derivadas parciales necesarias, teniéndose:

$$[B] = \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \dots\dots \text{Ecuación (62)}$$

Nótese que esta última matriz de funciones de interpolación de deformaciones  $[B]$ , se encuentra en función a las coordenadas de los 3 Nodos del elemento y que son conocidos desde un principio.

### 4.1.3 Matriz de rigidez

El enfoque general del análisis matricial de estructuras implica calcular la matriz de rigidez de cada elemento, para posterior realizar un ensamblaje de la matriz de rigidez de toda la estructura, que a su vez proporcionara los desplazamientos de cada nodo para a partir de ellos obtener las deformaciones unitarias necesarias para calcular los esfuerzos correspondientes.

El Principio de Trabajos Virtuales (PTV), que se desarrolló en el apartado 2.2.2 Proporciona la expresión de la matriz de rigidez y se presenta de nuevo aquí como:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \dots\dots\dots \text{Ecuación (63)}$$

Esta expresión fue obtenida para un caso tridimensional y puede ser establecida para un caso bidimensional cuando el diferencial de volumen  $dV$  es obtenido como el producto del espesor constante  $t$  por el diferencial de área  $dA$ , lo cual da lugar a:

$$[K] = \int_A [B]^T [D] [B] t dA \dots\dots\dots \text{Ecuación (64)}$$

Por otra parte la ecuación anterior implica una integración en el área del elemento, esta integral no será evaluada para el caso del elemento finito bidimensional de 3 nodos, debido a que si se examina la matriz  $[B]$ , las derivadas parciales de las funciones de interpolación que esta contiene, proporcionara valores constantes debido a que estas últimas no son funciones de las variables  $x$  e  $y$ . Por tanto, la ecuación (64) se reescribe como:

$$[K] = [B]^T [D] [B] t A \dots\dots\dots \text{Ecuación (65)}$$

Esta expresión será evaluada al reemplazar el espesor del elemento, el área calculado de la ecuación (44) , la matriz de funciones de interpolación de deformación, presentada en la ecuación (62) y la matriz constitutiva que contiene a las propiedades mecánicas del material, presentadas en las ecuaciones (16) ó (18), según sea el caso.

#### 4.1.4 Cálculo de desplazamientos

Una vez calculada la matriz de rigidez del elemento, se deberá establecer el equilibrio del sistema completo a través de una expresión análoga a la que fue establecida en el Principio de Trabajos virtuales, teniéndose así:

$$[F_{EST}] = [K_{EST}][d_{EST}] \dots\dots\dots \text{Ecuación (66)}$$

Donde  $[K_{EST}]$  es la matriz de rigidez de todo el sistema y que puede ser calculada a través de la contribución de rigidez  $[K]$  que generan todos los elementos al sistema, así este procedimiento se expresa como:

$$[K_{EST}] = \overset{e}{\sum} [K] \dots\dots\dots \text{Ecuación (67)}$$

Del mismo modo  $[F_{EST}]$  es un vector columna de fuerzas externas de todo el sistema y que puede ser calculado a través de la contribución de fuerzas  $[F]$  que se presentan en los nodos del elemento, representando así una equivalencia de las cargas que se presentan en todo el elemento, así este procedimiento se presenta como:

$$[F_{EST}] = \overset{e}{\sum} [F] \dots\dots\dots \text{Ecuación (68)}$$

Siendo  $\overset{e}{E}$  un símbolo que representa el ensamblaje de todas las matrices que pertenecen al sistema, esto es un procedimiento igual al que se establece en el método de rigidez directa.

La matriz rigidez de la estructura  $[K_{EST}]$  y el vector de fuerzas de la estructura  $[F_{EST}]$  deberán ser ensamblados considerando en primer lugar a la contribución que generan aquellos grados de libertad que no presenten ningún tipo de restricción al desplazamiento, denominados grados de libertad libres y en seguida se ensamblan a todos los grados de libertad que presentan restricción al desplazamiento, denominados grados de libertad restringidos, teniéndose así el siguiente orden:

$$[K_{EST}] = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ur} \\ K_{ru} & K_{rr} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (69)}$$

Donde la submatriz  $K_{uu}$  corresponde a la contribución de rigidez en los grados de libertad libres, la submatriz  $K_{rr}$  corresponde a la contribución de rigidez en los grados de libertad restringidos y las submatrices  $K_{ru}$  y  $K_{ur}$  correlacionan las contribuciones de rigidez de los grados de libertad libres con los grados de libertad restringidos.

De la misma manera se ordenan los vectores de fuerzas y desplazamientos de la estructura teniéndose:

$$[F_{EST}] = \begin{bmatrix} F_u \\ F_r \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (70)}$$

$$[d_{EST}] = \begin{bmatrix} d_u \\ d_r \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (71)}$$

Donde las submatrices  $F_u$  y  $d_u$  corresponden a las fuerzas y desplazamientos en los grados de libertad libres y las submatrices  $F_r$  y  $d_r$  corresponden a las fuerzas y desplazamientos en los grados de libertad restringidos. Por otra parte, la submatriz  $F_r$  puede tener componentes que corresponden a las reacciones a calcular denotadas como  $F_{re}$  y las fuerzas que se presentan en los grados propiamente dichos  $F_{rr}$ , reescribiéndose la ecuación (70) como:

$$[F_{EST}] = \begin{bmatrix} F_u \\ F_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_u \\ F_{re} + F_{rr} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (72)}$$

Entonces la ecuación de equilibrio (66) puede ser reescrita, de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_{re} + F_{rr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ur} \\ K_{ru} & K_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_u \\ d_r \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (73)}$$

Si se desea conocer los desplazamientos de los grados de libertad libres  $[d_u]$ , se deberá desarrollar la matriz de (73) hallando previamente las fuerzas en los grados de libertad libres  $[F_u]$ , obteniéndose:

$$[F_u] = [K_{uu}][d_u] + [K_{ur}][d_r] \dots\dots\dots \text{Ecuación (74)}$$

Y despejando la submatriz de desplazamientos  $[d_u]$ , se tendría:

$$[d_u] = [K_{uu}]^{-1}([F_u] - [K_{ur}][d_r]) \dots\dots\dots \text{Ecuación (75)}$$

Cuando los desplazamientos  $[d_u]$ , ya fueron calculados, puede calcularse las reacciones  $[F_{re}]$  desarrollando la matriz de (73), para obtener:

$$[F_{re}] = [K_{ru}][d_u] + [K_{rr}][d_r] - [F_{rr}] \dots\dots\dots \text{Ecuación (76)}$$

Una vez calculados los desplazamientos  $[d_u]$  de todo el sistema, deberán extraerse los desplazamientos  $[d]$  de los grados de libertad que conforman a cada elemento, que serán utilizados para realizar el cálculo de esfuerzos que se presenta en el siguiente apartado.

#### 4.1.5 Relación esfuerzo - deformación

La relación entre esfuerzos y deformaciones para un caso bidimensional fue presentado en el apartado 2.2.1.3 que presenta el estado para los casos de esfuerzo en el plano en la ecuación (16) y para el caso de deformación en el plano en la ecuación (18), podrá notarse que ambos casos se presentan en forma compacta y se escriben de la forma siguiente:

$$[\sigma] = [D][\mathcal{E}] \dots\dots\dots \text{Ecuación (77)}$$

Como se puede apreciar, esta ecuación se encuentra en función de la matriz constitutiva  $[D]$  y de la matriz deformaciones unitarias  $[\mathcal{E}]$ , que fue encontrada en la ecuación (59), y que al reemplazarla en la ecuación (77), resultaría:

$$[\sigma] = [D][B][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (78)}$$

Con la que puede lograrse calcular el estado tensional o estado de esfuerzos en cada elemento que conforma al sistema, y que sin duda alguna es constante en cada elemento debido a que la matriz de interpolación de deformaciones  $[B]$  se encuentra en función a las coordenadas nodales del elemento, y que al ser evaluada, proveerá una matriz constante para todo el elemento. Por otra parte los desplazamientos del elemento pueden ser encontrados realizando el procedimiento del apartado 4.1.4.

Como ejemplo, considérese el caso de un elemento finito en un estado de Esfuerzo Plano de matriz constitutiva  $[D]$  siguiente:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (79)}$$

Y que al ser reemplazada en la ecuación (78) junto con las matrices de interpolación de deformaciones  $[B]$  de la ecuación (62) y los desplazamientos encontrados para el elemento se obtendría:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{Ecuación (80)}$$

Esta última expresión tal como se mencionó en párrafos anteriores, entrega un estado constante de esfuerzos en cada elemento. Por otra parte, es usual que los programas de computadora realicen ciertas técnicas para presentar valores refinados de los esfuerzos, una de estas técnicas se denomina “Alisado de Esfuerzos” y será presentada en el apartado siguiente.

#### 4.1.6 Alisado de esfuerzos

El alisado es una técnica que consiste en encontrar valores únicos de esfuerzos en un nodo compartido por una cierta cantidad de elementos que concurren a él. Para explicar de forma más clara esta técnica, realizaremos el siguiente ejemplo:

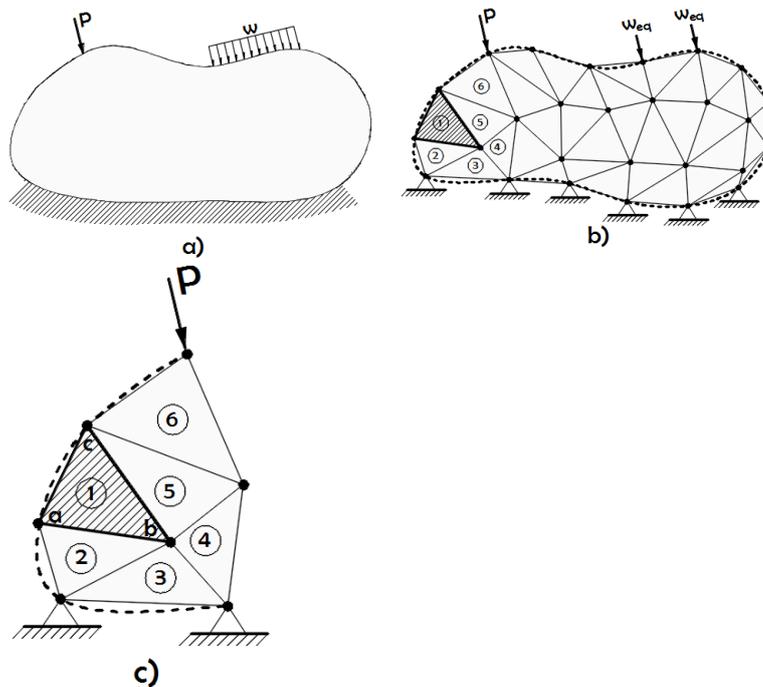


Figura 11. Ejemplo para el alisado de esfuerzos en elementos de tres nodos

Considérese al sistema continuo que se presenta en la Figura 11 (a), dicho sistema requiere ser solucionado, y para ello, se recurre al Método de Elementos Finitos, con lo cual se dividirá al continuo de la forma mostrada en la Figura 11 (b), nótese que en esta figura se sombrea un elemento de estudio, y que es ampliado en la Figura 11 (c).

Para cada elemento que conforma el sistema se encontrara un estado de esfuerzos diferente, por ello cada nodo compartido, estará sometido a esfuerzos diferentes provenientes de los demás elementos, entonces si se desea encontrar un valor único de esfuerzos para cada nodo, se tendrá que calcular el promedio de los

esfuerzos que concurren al nodo en cuestión. En la Figura 11 (c) puede observarse que el nodo “a” es compartido por 2 elementos, que son el elemento 1 con un estado de esfuerzos  $[\sigma_1]$  y el elemento 2 con un estado de esfuerzos  $[\sigma_2]$ , entonces un único estado de esfuerzos en el nodo “a” será expresado por el siguiente promedio:

$$[\sigma_a] = \frac{[\sigma_1] + [\sigma_2]}{2} \dots\dots\dots \text{Ecuación (81)}$$

Del mismo modo, para el nodo “b” y nodo “c” se tendría lo siguiente:

$$[\sigma_b] = \frac{[\sigma_1] + [\sigma_2] + [\sigma_3] + [\sigma_4] + [\sigma_5]}{5}$$

$$[\sigma_c] = \frac{[\sigma_1] + [\sigma_5] + [\sigma_6]}{3} \dots\dots\dots \text{Ecuación (82)}$$

Esta es la técnica de alisado de esfuerzos, con la cual el estado de esfuerzos deja de ser constante, debido a los diferentes esfuerzos que se obtendrán en cada nodo.

#### 4.1.7 Ejemplo para el elemento finito bidimensional de tres nodos

Considérese a la viga en voladizo sujeta a cargas de corte P mostradas en la siguiente figura:

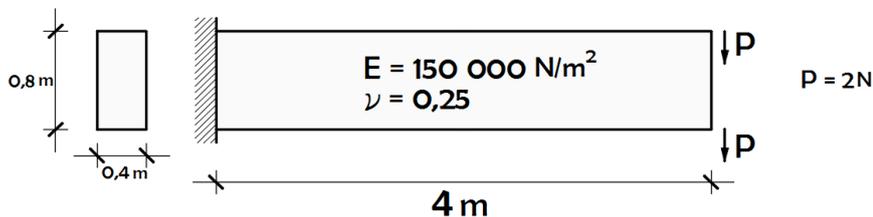


Figura 12. Viga en voladizo sujeta a cargas de corte

La viga mostrada puede ser solucionada utilizando el método de elementos finitos, considerando el caso de esfuerzo plano, y para ello, se requiere

de un modelo de cálculo en el cual se realice la discretización del continuo en una cierta cantidad de elementos bidimensionales de 3 Nodos, tal como el mostrado a continuación.

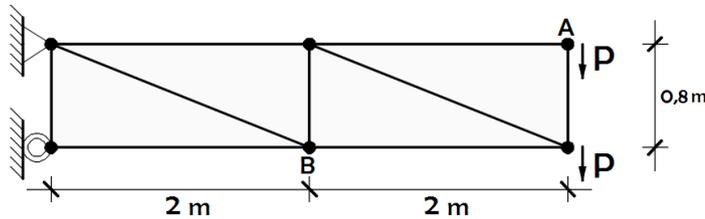


Figura 13. Modelo de cálculo y discretización utilizando elementos de tres nodos

#### 4.1.7.1 Resultados

La metodología de evaluación, estima el error obtenido por la siguiente expresión:

$$\%error = \left( \frac{\text{analizado}}{\text{exacto}} - 1 \right) \times 100 \dots\dots\dots \text{Ecuación (83)}$$

Y la siguiente tabla presenta los resultados del análisis por elementos finitos para el desplazamiento en el punto A y el esfuerzo alisado en la dirección horizontal en el punto B, los cuales serán comparados con un cálculo exacto, proporcionado por la Teoría de Vigas.

**Tabla 1**

*Resultados de esfuerzos y desplazamientos – elemento de tres nodos*

Modelo	Desp. vertical (m)	%error	Esfuerzo horizontal (N/m <sup>2</sup> )	%error
Exacto	-0,0343	-	-187,5	-
3 Nodos Bidimensional	-0,0041	-88,08	-3,115	-98,34

La tabla anterior muestra los resultados que ofrece una malla de 4 elementos finitos bidimensionales de 3 Nodos, y podrá notarse que los porcentajes de error son bastante elevados, tanto para desplazamientos como para esfuerzos. Nótese también, que el porcentaje de error en los desplazamientos es inferior al

porcentaje de error en los esfuerzos, debido a que los esfuerzos son hallados utilizando las primeras derivadas de las funciones de interpolación, y que representan el motivo por el cual se han degradado los resultados.

Por otra parte, los cuatro elementos utilizados resultan insuficientes para poder obtener resultados adecuados, que podrían ser alcanzados al aumentar el número de elementos, con el que se formaría un mallado riguroso, que sin duda alguna requeriría de un mayor procesamiento numérico.

#### 4.1.8 Ejemplo computacional y manual utilizando elementos de tres nodos

Considérese el ejemplo del apartado anterior, tomando en cuenta el caso de Elasticidad bidimensional en Deformación Plana y con espesor de un metro. Con este ejemplo se realizara la comparativa entre las soluciones de elementos finitos otorgadas por los programas SAP2000 y Phase2, además de realizar un cálculo manual.

El modelo de cálculo y las cargas actuantes utilizadas en el programa SAP2000, se presentan en la siguiente figura:

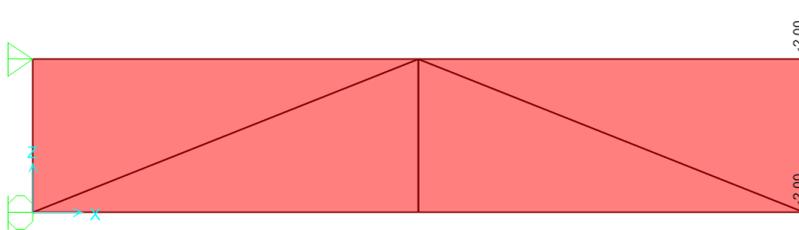


Figura 14. Modelo de cálculo de elementos de tres nodos en SAP2000

Los desplazamientos verticales hallados en cada punto del sistema pueden ser presentados a partir de un gráfico de contornos de igual desplazamiento vertical. De la misma manera podría obtenerse dichos gráficos para los esfuerzos inducidos

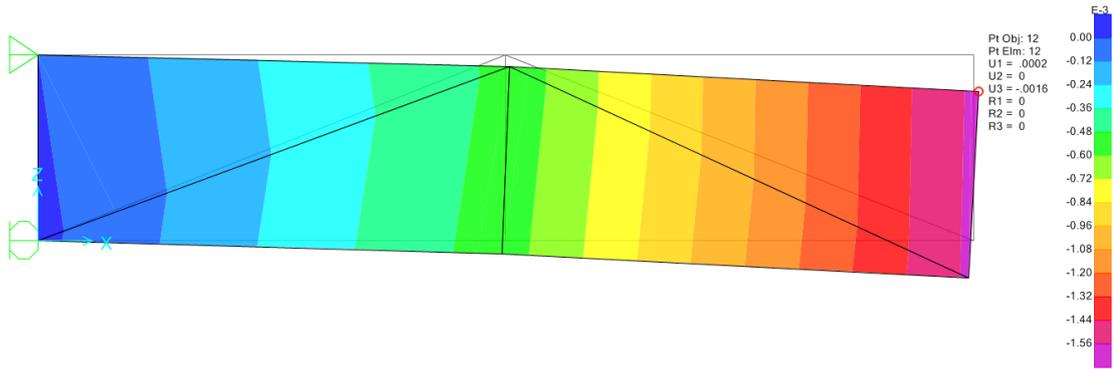


Figura 15. Desplazamientos verticales para elementos de tres nodos en SAP2000

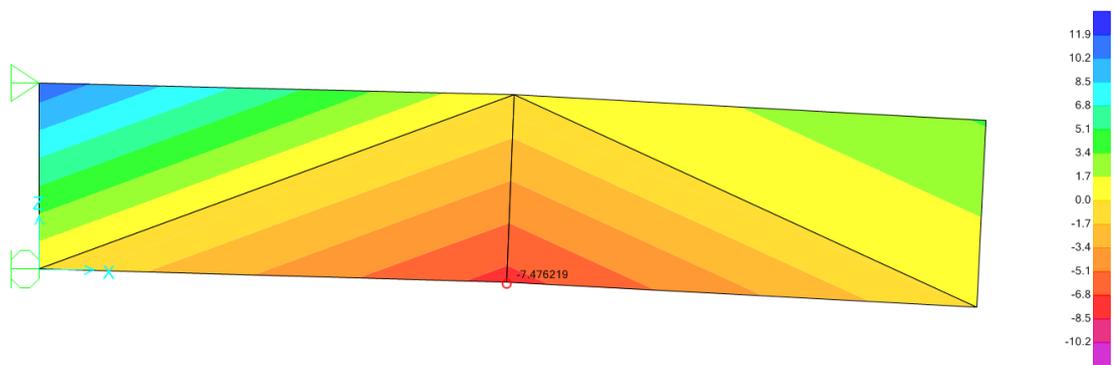


Figura 16. Esfuerzos horizontales para elementos de tres nodos en SAP2000

El modelo de cálculo y las cargas actuantes utilizadas en el programa Phase 2, se presentan en la siguiente figura:

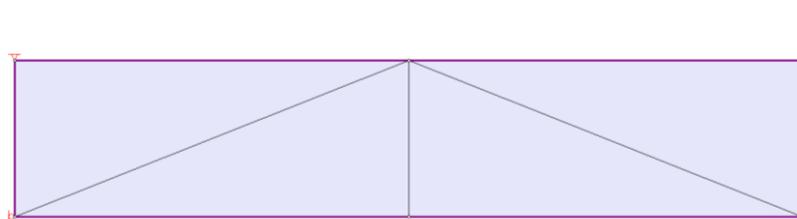


Figura 17. Modelo de cálculo de elementos de tres nodos en Phase 2

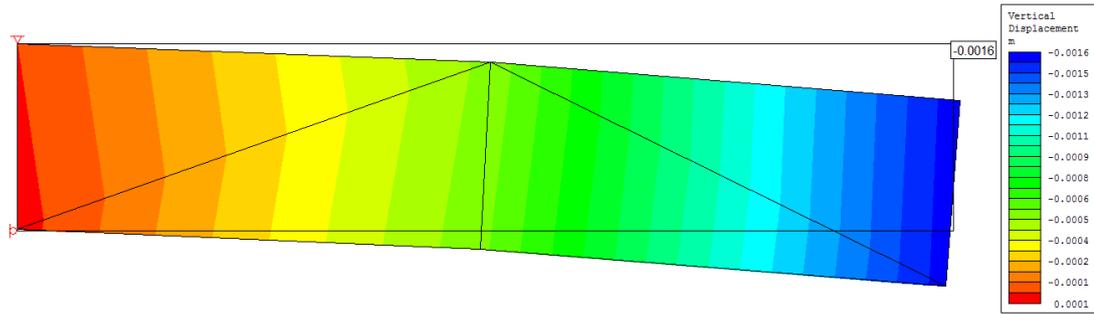


Figura 18. Desplazamientos verticales para elementos de tres nodos en Phase 2

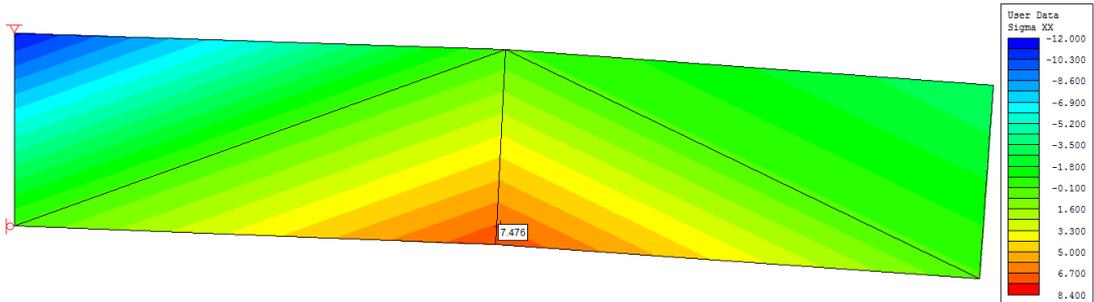


Figura 19. Esfuerzos horizontales para elementos de tres nodos en Phase 2

Podrá notarse que ambos programas entregan una misma solución tanto para esfuerzos como para desplazamientos, los resultados de un cálculo manual se presentaran a posterior (ver apéndice A) y con resultados idénticos a los obtenidos en los programas SAP2000 y Phase 2.

#### 4.1.9 Comportamiento del elemento finito bidimensional de tres nodos

En el método de elementos finitos es usual utilizar el término “convergencia” para referirse a la comparación de alguna solución obtenida y la solución exacta para algún problema analizado. Dicho esto, podrá decirse que un análisis por el método de elementos finitos es convergente, si al aumentar el número elementos y el número de grados de libertad, la solución obtenida se aproxima hacia la solución exacta.

La evaluación del comportamiento del elemento finito de 3 nodos, se centra en la capacidad convergente que este posee, y para ello, se han preparado gráficos de resultados de desplazamientos y esfuerzos en función al incremento de grados de libertad de la viga en voladizo del ejemplo del apartado 4.1.7.

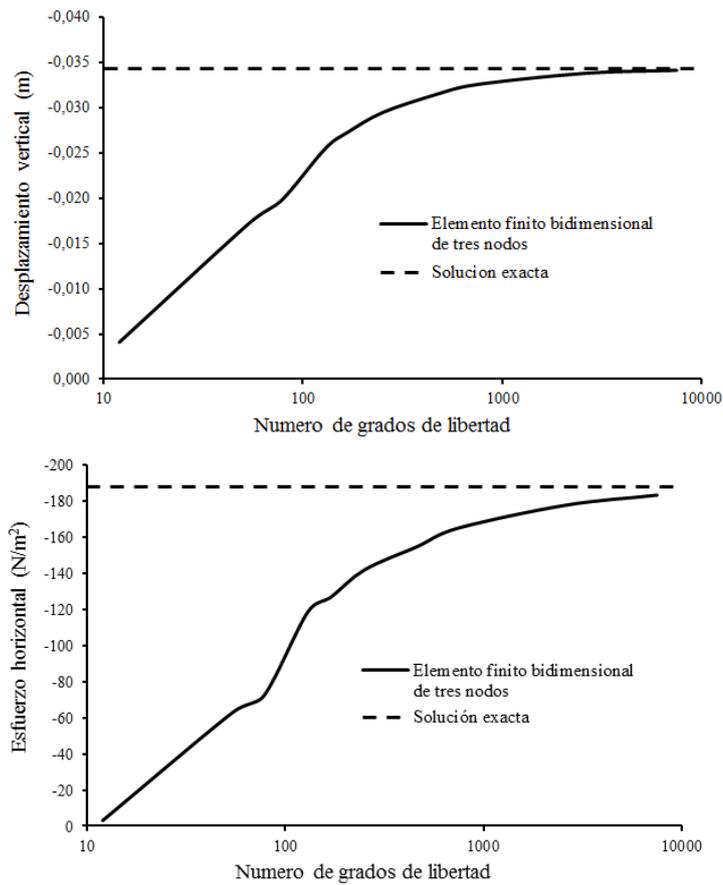


Figura 20. Comportamiento del elemento finito de tres nodos

Se demuestran en estos últimos que una vez más los desplazamientos a diferencia de los esfuerzos, convergen con mayor rapidez, y que solo a partir de los diez mil grados de libertad será posible obtener resultados aceptables para el elemento finito bidimensional de tres nodos. Debe tenerse en cuenta que el ejemplo realizado posee predominancia a flexión, requiriendo un mallado riguroso, y en contraste con un problema que posea predominancia en tracción o compresión, que requeriría de un mallado poco denso.

## 4.2 Elemento finito bidimensional de cuatro nodos

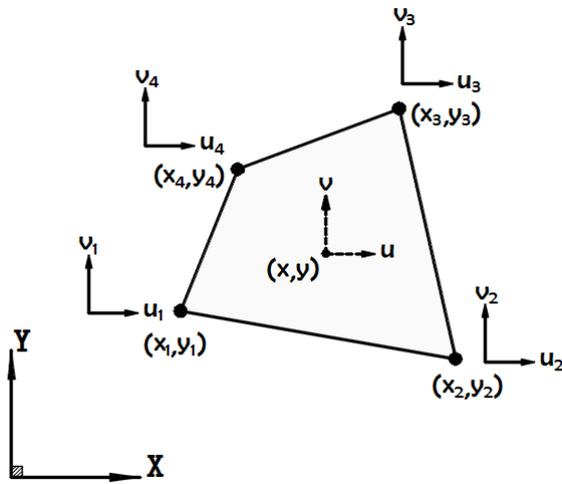


Figura 21. Elemento finito bidimensional de tres nodos

El elemento finito desarrollado en este capítulo servirá para introducirnos a una nueva forma de formulación del método de elementos finitos, denominada formulación “Isoparamétrica”. Esta formulación fue presentada por Irons B. y Zienkiewicz O. en 1968, y representa uno de los aportes más significativos en el campo de los elementos finitos.

Se denomina formulación isoparamétrica debido a que se usaran las mismas funciones de interpolación tanto para los desplazamientos como para las coordenadas de un punto perteneciente al elemento. Esta formulación permitirá generar elementos de geometría arbitraria, al utilizar como base un sistema de coordenadas diferente al cartesiano, y que se denomina “sistema natural de coordenadas” o “sistema normalizado de coordenadas”.

### 4.2.1 Sistema natural de coordenadas

La utilización del Sistema Natural de Coordenadas, es fundamental para la utilización de la formulación de tipo Isoparamétrica, y se define como un sistema

en el que la forma arbitraria de un elemento en un Sistema Cartesiano, puede ser expresado en forma regular en un Sistema Natural, en tal sentido las dimensiones de este elemento estarán normalizadas o estandarizadas a dimensiones que valgan la unidad a partir de los ejes de referencia  $r$  (análogo al eje  $X$  del sistema cartesiano) y  $s$  (análogo al eje  $Y$  del sistema cartesiano).

La equivalencia que ambos sistemas tendrán, se expresa en la Figura 22, en la que se observa, que a un punto del Sistema Natural, le corresponde un punto en el Sistema Cartesiano.

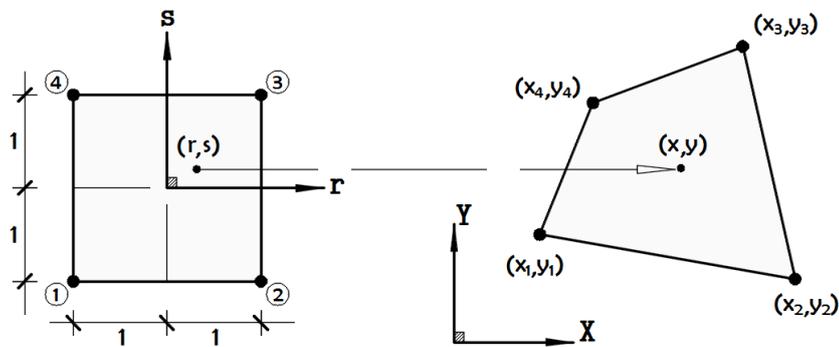


Figura 22. Equivalencia de coordenadas entre el sistema natural y el cartesiano

En los siguientes apartados se trabajara ampliamente con el sistema de coordenadas naturales, lo cual facilitara muchos de los procedimientos de cálculo.

#### 4.2.2 Funciones de desplazamiento

Los siguientes párrafos detallaran el desarrollo de la formulación Isoparametrica del Elemento Finito de 4 nodos, el cual dará nociones generales para la formulación Isoparametrica de muchos tipos de Elementos Finitos.

A diferencia del elemento desarrollado en el apartado 4.1, para este elemento, no se elegirá un polinomio para la función de desplazamientos, sino más bien, se recurrirá al “ingenio” para expresar funciones de desplazamiento que

dependan de ciertas Funciones de Interpolación, que serán seleccionadas para un sistema de coordenadas natural. Por otra parte, estas funciones de interpolación, serán halladas por mera observación y destreza.

#### 4.2.2.1 *Funciones de interpolación*

Las funciones de interpolación para cada nodo del Elemento Finito Bidimensional de 4 Nodos se expresan en el Sistema Natural de Coordenadas, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s)
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots \text{Ecuación (84)}$$

Estas funciones de interpolación no se obtienen de un proceso analítico como el que se siguió para hallar las funciones de interpolación del elemento del apartado 4.1, sino más bien, se obtienen a partir de ingenio y observación, por ello, estas funciones de interpolación son conocidas como funciones serendipitas, en referencia a la obra “Los Tres Príncipes de Serendip” del autor británico Horacio Walpole, en la que los personajes principales demostraban inteligencia, ingenio y destreza a partir de pura observación.

Por otra parte los procedimientos para la obtención de estas funciones ingeniosas pueden ser encontrados en (Zienkiewicz & Taylor, 1994) y (Oñate, 1991).

La validez de las funciones de interpolación presentadas en el juego de ecuaciones (84), puede ser demostrada, teniendo en cuenta que si se realiza la evaluación de estas funciones para un nodo  $i$ , la función de interpolación  $N_i$  valdrá la unidad y el resto de funciones de interpolación tendrán valor nulo. Este

criterio es el mismo que se cumple para el elemento finito de 3 nodos presentado en el apartado 4.1.

#### 4.2.2.2 Expresión final de las funciones de desplazamiento

Las expresiones finales de las funciones de desplazamiento serán análogas a las expresiones (48) y (50) del apartado 4.1, y son expresadas en la forma:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (85)}$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (86)}$$

Por otra parte es conveniente expresar las ecuaciones (85) y (86) en forma matricial, para obtener la siguiente expresión:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (87)}$$

Y que en forma compacta, puede ser expresada como:

$$[U] = [N][d] \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (88)}$$

La expresión compacta establece la relación que tiene el desplazamiento  $[U]$  de un punto cualquiera, con los desplazamientos nodales  $[d]$  del elemento de 4 nodos.

### 4.2.3 Relación deformación - desplazamiento

El estado de deformaciones para un caso bidimensional fue presentado en la Figura 6, y podrá notarse que será necesario rescatar las deformaciones unitarias para el plano  $XY$  del juego de ecuaciones (9), teniéndose:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (89)}$$

Estas últimas relaciones pueden ser expresadas en la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (90)}$$

Y es conveniente realizar la sustitución de la matriz que se encuentra en función de derivadas parciales, para obtener:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\partial] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (91)}$$

Nótese que la expresión (90) es idéntica a la expresión (54) del apartado 4.1, en la que se denominó a  $[\partial]$ , como un operador conveniente en derivadas parciales para un sistema de coordenadas cartesianas, presentado como:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (92)}$$

Como puede observarse, este operador se presenta para un sistema de coordenadas cartesianas, y deberá ser transformado para el sistema de coordenadas naturales, en el que se viene trabajando. Para hacer efectivo esta transformación, deberán establecerse ecuaciones que relacionen a ambos sistemas. Estas ecuaciones obedecen a reglas de la cadena y se expresan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned} \dots\dots\dots \text{Ecuación (93)}$$

Así, expresando estas ecuaciones en forma matricial, se tendría:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = [J] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (94)}$$

Donde  $[J]$  se denomina Jacobiano de la Transformación, y no es más que una forma de “puente” entre ambos sistemas, este operador se expresa como:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (95)}$$

Encontrada la relación entre ambos sistemas, puede mencionarse que la expresión (94) establece la equivalencia que tiene un sistema de coordenadas natural en función al sistema de coordenadas cartesianas, y que en el caso en el que se requiere obtener la equivalencia de un sistema cartesiano en función del sistema natural, será necesario realizar la inversión del Jacobiano de la Transformación, para obtener:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = [J]^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (96)}$$

La inversión del jacobiano de la transformación de esta última expresión, puede ser encontrada como:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (97)}$$

Y que al ser utilizada para ser reemplazada en la ecuación (96) se tendría la siguiente expresión final de la equivalencia de un sistema cartesiano en función al sistema natural:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (98)}$$

Puede notarse que esta última expresión contiene los términos necesarios, que requiere el operador  $[\mathcal{D}]$  presentado en la ecuación (92), por tanto, desarrollando la ecuación (98) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (99)}$$

Este último juego de ecuaciones, servirán para construir un nuevo operador  $[\mathcal{D}]$ , que establecerá la relación deformación–desplazamiento para un

sistema de coordenadas naturales, y que será obtenido reemplazando (99) en (92), para dar lugar a:

$$[\partial] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (100)}$$

La relación deformación–desplazamiento es obtenida sustituyendo la ecuación (100) en la ecuación (91), encontrándose:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (101)}$$

Y utilizando una forma compacta, se tendría:

$$[\varepsilon] = [\partial][U] \dots\dots\dots \text{Ecuación (102)}$$

Por otra parte, los desplazamientos  $[U]$  fueron establecidos en forma compacta mediante la ecuación (88) y reemplazándola en la ecuación compacta (102) se obtendría lo siguiente:

$$[\varepsilon] = [\partial][N][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (103)}$$

Al igual que en el apartado 4.1 es posible expresar al producto del operador  $[\partial]$  y las funciones de forma  $[N]$  a partir de una matriz  $[B]$ , con lo que se tendría:

$$[B] = [\mathcal{D}][N] \dots\dots\dots \text{Ecuación (104)}$$

De este modo la ecuación (103) sería reescrita como:

$$[\mathcal{E}] = [B][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (105)}$$

Finalmente esta es la expresión final que relaciona a deformaciones  $[\mathcal{E}]$  y desplazamientos  $[d]$ , a través de la Matriz  $[B]$ , denominada como matriz de funciones de interpolación de deformaciones, y que puede ser obtenida reemplazando la ecuación (100) y la matriz de funciones de interpolación  $[N]$ , en la ecuación (104), teniendo:

$$[B] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (106)}$$

Por simplicidad, la expresión  $[B]$  podrá subdividirse en dos componentes denominados  $[B_1]$  y  $[B_2]$ , escribiéndose en forma compacta como:

$$[B] = [B_1][B_2] \dots\dots\dots \text{Ecuación (107)}$$

En la que los términos de  $[B_1]$  y  $[B_2]$  son rescatados de la ecuación (106) como:

$$[B_1] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (108)}$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (109)}$$

Por otra parte,  $[B_2]$  implica un producto matricial, que puede ser desarrollado para obtenerse la siguiente expresión:

$$[B_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots \text{Ecuación (110)}$$

Al observarse la matriz  $[B_1]$ , podrá notarse que se requiere de las derivadas de las variables  $x$  e  $y$ , que expresan interpolación geométrica dentro del elemento de estudio y para ello es preciso, aprovechar la formulación isoperimétrica, la misma que establece que la geometría puede ser interpolada usando las mismas funciones que se usan para interpolar los desplazamientos, así las expresiones de interpolación geométrica son análogas a las de interpolación de desplazamientos y resultan:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \dots\dots\dots \text{Ecuación (111)}$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \dots\dots\dots \text{Ecuación (112)}$$

Nótese que la matriz  $[B_2]$ , requiere de derivar parcialmente a las funciones de interpolación, que sin duda alguna solo requerirán de procedimientos del cálculo matemático, al igual que la matriz  $[B_1]$ .

#### 4.2.4 Matriz de rigidez

El Principio de Trabajos Virtuales (PTV), desarrollado en el apartado 2.2.2 proporcione la expresión de la matriz de rigidez, y se presenta de nuevo aquí como:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \dots\dots\dots \text{Ecuación (113)}$$

Esta expresión obtenida para un caso tridimensional, puede ser establecida para un caso bidimensional cuando el diferencial de volumen  $dV$  es obtenido como el producto del espesor constante  $t$  por el diferencial de área  $dA$ , teniéndose así:

$$[K] = \int_A [B]^T [D] [B] t dA \dots\dots\dots \text{Ecuación (114)}$$

Por otra parte, la ecuación anterior implica una integración en el área del elemento, establecida para el sistema de coordenadas naturales, en la que el área del elemento varía de -1 a +1 para cada dirección, con lo cual la ecuación (114) se reescribe como:

$$[K] = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr ds \dots\dots\dots \text{Ecuación (115)}$$

Es fundamental mencionar que el cálculo de la matriz de rigidez no seguirá un procedimiento analítico como el seguido para el elemento de tres nodos mostrado en el apartado 4.1.3, sino más bien, deberá recurrirse a métodos

numéricos, tales como el método de Gauss-Legendre que será presentado a continuación.

#### 4.2.4.1 Integración numérica.

Conocidas las componentes que conforman la matriz de rigidez, es preciso confiar la solución de la expresión (115) a la integración numérica.

La integración numérica a realizar corresponde al método de Gauss-Legendre, este tipo de integración, implica a la sumatoria del producto de la función evaluada en unos puntos establecidos y unos coeficientes denominados “Pesos”. Esta definición es la que convierte a la ecuación (116), a la forma:

$$[K] = t \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_s} [B(r_i, s_j)]^T [D] [B(r_i, s_j)] \det[J(r_i, s_j)] W_{ir} W_{js} \quad \text{Ecuación (116)}$$

Si la expresión numérica anterior es utilizada para el caso de 4 puntos (2 para cada dirección) de Gauss-Legendre, los pesos y puntos de evaluación serían los mostrados en el siguiente gráfico:

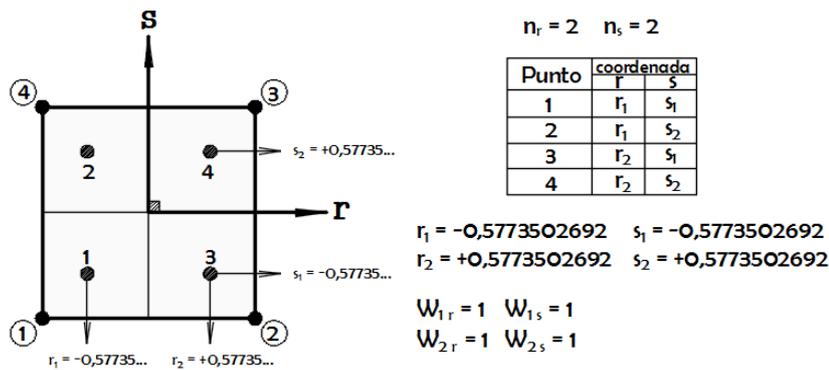


Figura 23. Cuadratura de Gauss-Legendre (4 Puntos)

El desarrollo de la ecuación (116), para la cuadratura de 4 puntos sería:

$$\begin{aligned}
[K] = & t [B(r_1, s_1)]^T [D] [B(r_1, s_1)] \det[J(r_1, s_1)] W_{1r} W_{1s} + \\
& t [B(r_1, s_2)]^T [D] [B(r_1, s_2)] \det[J(r_1, s_2)] W_{1r} W_{2s} + \\
& t [B(r_2, s_1)]^T [D] [B(r_2, s_1)] \det[J(r_2, s_1)] W_{2r} W_{1s} + \\
& t [B(r_2, s_2)]^T [D] [B(r_2, s_2)] \det[J(r_2, s_2)] W_{2r} W_{2s} \dots \dots \text{Ecuación (117)}
\end{aligned}$$

Donde los términos necesarios para los productos y sumatorias de las matrices de esta ecuación, se encuentran en la Figura 23.

#### 4.2.5 Cálculo de desplazamientos

El cálculo de los desplazamientos consiste en establecer el equilibrio del sistema completo a través de una expresión análoga a la que fue establecida en el Principio de Trabajos virtuales, y que se presenta nuevamente en este apartado como:

$$[F_{EST}] = [K_{EST}] [d_{EST}] \dots \dots \dots \text{Ecuación (118)}$$

Por tanto, el cálculo de los desplazamientos del elemento de este apartado, seguirá los mismos procedimientos que se describieron en el apartado 4.1.4.

#### 4.2.6 Relación esfuerzo - deformación

El estado de esfuerzos para un caso bidimensional fue presentado en el apartado 2.2.1.3, en el cual se tiene la posibilidad de elegir dos estados 1) para los casos de Esfuerzo en el Plano a través de la ecuación (16) y 2) para los casos de Deformación en el Plano a través de la ecuación (18), podrá notarse también, que ambos casos se presentan en forma compacta y se escriben de la forma:

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] \dots \dots \dots \text{Ecuación (119)}$$

Esta ecuación se encuentra en función de la matriz constitutiva  $[D]$  y de las deformaciones unitarias  $[\mathcal{E}]$ , encontradas en la ecuación (105), y que al ser reemplazada en (119), se obtendría:

$$[\sigma] = [D][B][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (120)}$$

Esta expresión proporcionara el estado de esfuerzos para cada elemento, cuando los desplazamientos  $[d]$  se hayan calculado realizando el procedimiento del apartado 4.1.4. Por otra, parte el elemento no tendrá un estado tensional constante debido a que las derivadas de la matriz de interpolación de deformación  $[B]$  han sido evaluadas cuatro veces, para los cuatro punto de Gauss que fueron utilizados, entendiéndose con esto, que deberá evaluarse un estado de esfuerzos para los cuatro puntos, y que son definidos mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} [\sigma_{PG1}] &= [D][B(r_1, s_1)][d] & [\sigma_{PG2}] &= [D][B(r_1, s_2)][d] \\ [\sigma_{PG3}] &= [D][B(r_2, s_1)][d] & [\sigma_{PG4}] &= [D][B(r_2, s_2)][d] \end{aligned} \quad \text{Ecuación (121)}$$

Cabe resaltar, que estos esfuerzos ubicados en los puntos de gauss, son denominados también, puntos óptimos para el cálculo de esfuerzos, debido a que poseen mayor probabilidad de alcanzar resultados exactos, por el hecho de que durante todo el proceso de formulación se ha utilizado la cuadratura de Gauss-Legendre.

Por otra parte si se desea hallar los esfuerzos nodales, se deberá realizar el procedimiento siguiente, denominado, Extrapolación de esfuerzos.

#### 4.2.7 Extrapolación de esfuerzos

Si lo que se desea es encontrar el estado tensional o estado de esfuerzos en los nodos, podrá recurrirse a deducir dicho estado, a partir del estado tensional encontrado en los puntos de Gauss-Legendre. Para ello será necesario tomar como

punto de partida, la interpolación de esfuerzos que se encuentran dentro de las coordenadas  $\pm p$  de los puntos de Gauss, entonces la interpolación será en los intervalos de  $-p$  a  $+p$ , tanto para la coordenada  $r$  como  $s$ . Para realizar este procedimiento interno a los puntos de Gauss, a continuación se mostrara la correspondencia que tiene cada función de interpolación con cada punto de Gauss.

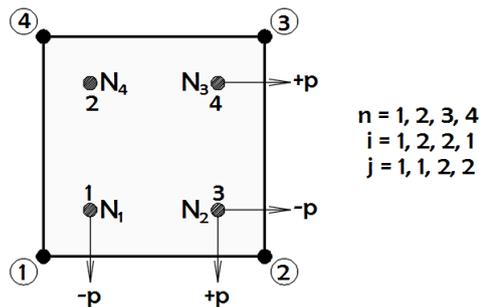


Figura 24. Correspondencia entre puntos de Gauss y funciones de interpolación para el elemento finito bidimensional de cuatro nodos

Establecida la correspondencia entre puntos de Gauss y los nodos del elemento, la interpolación tensional  $[\sigma_{in}]$  dentro del intervalo de los puntos de Gauss puede ser escrita como:

$$[\sigma_{in}] = (N_1)[\sigma_{PG1}] + (N_2)[\sigma_{PG3}] + (N_3)[\sigma_{PG4}] + (N_4)[\sigma_{PG2}] \quad \text{Ecuación (122)}$$

Por otra parte, si esta misma ecuación es utilizada para hallar el estado de esfuerzos en los nodos, la función de interpolación  $N_1$ , evaluada en el primer nodo, deberá tomar como valor la unidad y el resto de funciones un valor nulo. Para cumplir esta condición se deberá expresar a la función  $N_1$ , como:

$$N_1 = \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{r}{p} \right) \left( 1 - \frac{s}{p} \right) \dots \dots \dots \text{Ecuación (123)}$$

De tal manera que al reemplazarse  $r = -p$  y  $s = -p$ , la función de interpolación  $N_1$  cumplirá con la condición antes descrita.

De la misma manera, las demás funciones de interpolación deberán expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 N_2 &= \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \left( 1 - \frac{s}{p} \right) & N_3 &= \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \left( 1 + \frac{s}{p} \right) \\
 N_4 &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{r}{p} \right) \left( 1 + \frac{s}{p} \right)
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots \text{Ecuación (124)}$$

A partir de estas expresiones, puede realizarse la Extrapolación a los nodos. Puede tomarse como ejemplo el cálculo del estado tensional extrapolado al nodo 1, en el que las coordenadas naturales toman valores  $r = -1$  y  $s = -1$ , dando lugar al siguiente estado:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{Ex1}] &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{-1}{p} \right) \left( 1 - \frac{-1}{p} \right) [\sigma_{PG1}] + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{-1}{p} \right) \left( 1 - \frac{-1}{p} \right) [\sigma_{PG3}] + \\
 &\quad \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{-1}{p} \right) \left( 1 + \frac{-1}{p} \right) [\sigma_{PG4}] + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{-1}{p} \right) \left( 1 + \frac{-1}{p} \right) [\sigma_{PG2}]
 \end{aligned}
 \dots\dots \text{Ecuación (125)}$$

Puede notarse que este estado también puede ser expresado en términos de las coordenadas primer del punto de Gauss  $r_1$  y  $s_1$ , obteniéndose la siguiente expresión de extrapolación para el primer nodo del elemento:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{Ex1}] &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{r_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{s_1} \right) [\sigma_{PG1}] + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{r_1} \right) \left( 1 - \frac{1}{s_1} \right) [\sigma_{PG3}] + \\
 &\quad \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{r_1} \right) \left( 1 + \frac{1}{s_1} \right) [\sigma_{PG4}] + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{r_1} \right) \left( 1 + \frac{1}{s_1} \right) [\sigma_{PG2}]
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots \text{Ecuación (126)}$$

Conocidos los procedimientos anteriores, es lógico suponer que la ecuación anterior puede ser generalizada para los demás nodos, en la forma:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{Exn}] &= \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{r_i} \right) \left( 1 - \frac{1}{s_j} \right) [\sigma_{PG1}] + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{r_i} \right) \left( 1 - \frac{1}{s_j} \right) [\sigma_{PG3}] + \\
 &\quad \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{r_i} \right) \left( 1 + \frac{1}{s_j} \right) [\sigma_{PG4}] + \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{r_i} \right) \left( 1 + \frac{1}{s_j} \right) [\sigma_{PG2}]
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots \text{Ecuación (127)}$$

En la que los términos  $n, i, j$  se presentan en la Figura 24. Por otra parte, es usual utilizar la anterior ecuación retomando, la forma original de las funciones de interpolación, al hacer que  $r = 1 / r_i$  y  $s = 1 / s_j$ , lográndose obtener:

$$[\sigma_{Exn}] = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)[\sigma_{PG1}] + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)[\sigma_{PG3}] + \frac{1}{4}(1+r)(1+s)[\sigma_{PG4}] + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)[\sigma_{PG2}] \dots\dots\dots \text{Ecuación (128)}$$

Y que se expresa en forma compacta como:

$$[\sigma_{Exn}] = \left( N_1 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG1}] + \left( N_2 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG3}] + \left( N_3 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG4}] + \left( N_4 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG2}] \dots\dots\dots \text{Ecuación (129)}$$

En esta última ecuación será suficiente sustituir los valores de  $1 / r_i$  y  $1 / s_j$  en las funciones de interpolación originales mostradas en la ecuación (84). Si la expresión (129) es desarrollada para los 4 nodos, al seguir la secuencia de  $n, i, j$  de la Figura 24, se obtendrá en forma compacta:

$$\begin{aligned} [\sigma_{Ex1}] &= \left( N_1 \left( \frac{1}{r_1}, \frac{1}{s_1} \right) \right) [\sigma_{PG1}] + \left( N_2 \left( \frac{1}{r_1}, \frac{1}{s_1} \right) \right) [\sigma_{PG3}] + \left( N_3 \left( \frac{1}{r_1}, \frac{1}{s_1} \right) \right) [\sigma_{PG4}] + \left( N_4 \left( \frac{1}{r_1}, \frac{1}{s_1} \right) \right) [\sigma_{PG2}] \\ [\sigma_{Ex2}] &= \left( N_1 \left( \frac{1}{r_2}, \frac{1}{s_1} \right) \right) [\sigma_{PG1}] + \left( N_2 \left( \frac{1}{r_2}, \frac{1}{s_1} \right) \right) [\sigma_{PG3}] + \left( N_3 \left( \frac{1}{r_2}, \frac{1}{s_1} \right) \right) [\sigma_{PG4}] + \left( N_4 \left( \frac{1}{r_2}, \frac{1}{s_1} \right) \right) [\sigma_{PG2}] \\ [\sigma_{Ex3}] &= \left( N_1 \left( \frac{1}{r_2}, \frac{1}{s_2} \right) \right) [\sigma_{PG1}] + \left( N_2 \left( \frac{1}{r_2}, \frac{1}{s_2} \right) \right) [\sigma_{PG3}] + \left( N_3 \left( \frac{1}{r_2}, \frac{1}{s_2} \right) \right) [\sigma_{PG4}] + \left( N_4 \left( \frac{1}{r_2}, \frac{1}{s_2} \right) \right) [\sigma_{PG2}] \quad (130) \\ [\sigma_{Ex4}] &= \left( N_1 \left( \frac{1}{r_1}, \frac{1}{s_2} \right) \right) [\sigma_{PG1}] + \left( N_2 \left( \frac{1}{r_1}, \frac{1}{s_2} \right) \right) [\sigma_{PG3}] + \left( N_3 \left( \frac{1}{r_1}, \frac{1}{s_2} \right) \right) [\sigma_{PG4}] + \left( N_4 \left( \frac{1}{r_1}, \frac{1}{s_2} \right) \right) [\sigma_{PG2}] \end{aligned}$$

Siendo estas, las ecuaciones de extrapolación hacia los nodos, y que también pudo seguirse un criterio más eficiente, al haberse hecho coincidir la numeración de los puntos de Gauss con la numeración de los nodos. Tenga en

cuenta que los valores de  $r_1 s_1$  y  $r_2 s_2$  pueden ser obtenidos a partir de la Figura 23.

#### 4.2.8 Alisado de esfuerzos

Calculados los esfuerzos en los nodos, podrá notarse que estos presentaran valores distintos para un nodo común al que concurren una cierta cantidad de elementos, por ello, deberá seguirse un procedimiento similar al que se desarrolló en el apartado 4.1.6, con la diferencia de que el estado de esfuerzos en un nodo, será tomado como el promedio de los esfuerzos extrapolados de los elementos que concurren al nudo.

Considérese la siguiente figura, para poder observar de manera directa lo que se tendría que realizar.

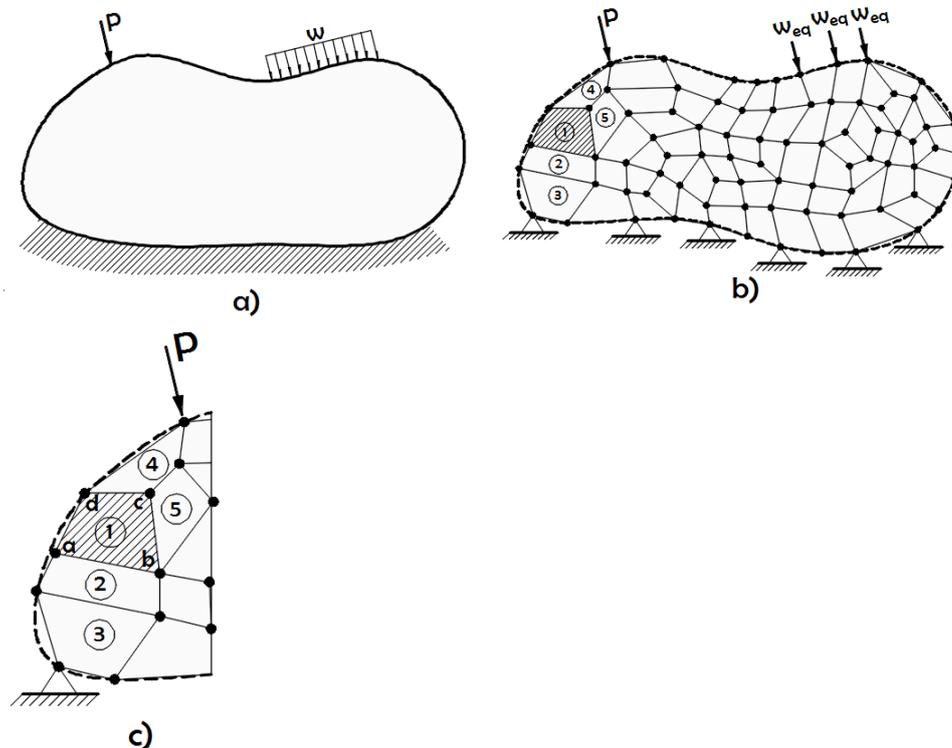


Figura 25. Ejemplo para el alisado de esfuerzos en elementos de cuatro nodos

El sistema continuo mostrado en Figura 25 (a) requiere ser solucionado por el Método de Elementos Finitos, y para ello se dividirá al continuo de la

forma mostrada en la Figura 25 (b) en el que se sombrea un elemento de estudio, y que será visto en forma ampliada en la Figura 25 (c)

Para cada elemento que conforma el sistema se encontrara 4 esfuerzos diferentes ubicados en los nodos, cada uno de ellos proveniente del proceso de extrapolación generado a partir de los esfuerzos obtenidos en los puntos de Gauss. Por otra parte consideremos el nodo “c”, al cual llegan esfuerzos extrapolados de los elementos 1, 4 y 5, que serán usados para obtener el siguiente estado de esfuerzos promedio:

$$[\sigma_c] = \frac{[\sigma_{Exc} 1] + [\sigma_{Exc} 4] + [\sigma_{Exc} 5]}{3} \dots\dots\dots \text{Ecuación (131)}$$

Esta es la técnica de alisado de esfuerzos, que generara un único estado de esfuerzos para cada uno de los nodos que conforma la malla de elementos finitos.

#### 4.2.9 Ejemplo para el elemento finito bidimensional de cuatro nodos

Considérese a la viga en voladizo sujeta a cargas de corte P mostradas en la siguiente figura:

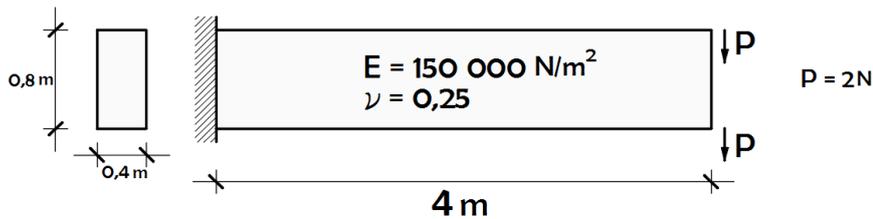


Figura 26. Viga en voladizo sujeta a cargas de corte

La viga mostrada puede ser solucionada utilizando el método de elementos finitos, considerando el caso de esfuerzo plano, y para ello, se requiere de un modelo de cálculo en el cual se realice la discretización del continuo en una cierta cantidad de elementos bidimensionales de 4 Nodos, tal como el mostrado a continuación.

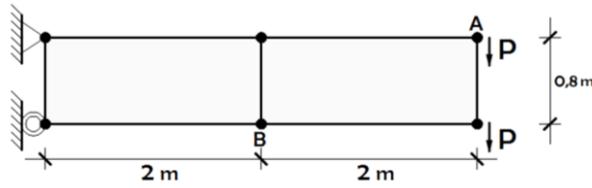


Figura 27. Modelo de cálculo y discretización utilizando elementos de cuatro nodos

#### 4.2.9.1 Resultados.

La metodología de evaluación, estima el error obtenido a través de:

$$\%error = \left( \frac{\text{analizado}}{\text{exacto}} - 1 \right) \times 100 \dots\dots\dots \text{Ecuación (132)}$$

Y la siguiente tabla presenta los resultados del análisis por elementos finitos para el desplazamiento en el punto A y el esfuerzo extrapolado y alisado en la dirección horizontal en el punto B, los cuales serán comparados con un cálculo exacto, proporcionado por la Teoría de Vigas.

**Tabla 2**

*Resultados de esfuerzos y desplazamientos – elemento de cuatro nodos*

Modelo	Desp. vertical (m)	%error	Esfuerzo horizontal (N/m <sup>2</sup> )	%error
Exacto	-0,0343	-	-187,5	-
4 Nodos Bidimensional	-0,0096	-72,01	-56,959	-69,62

La tabla anterior muestra los resultados que ofrece una malla de 2 elementos finitos bidimensionales de 4 Nodos, y podrá notarse que los porcentajes de error son bastante elevados, pero menores que los ofrecidos por el elemento finito de tres nodos, tanto para desplazamientos como para esfuerzos. Nótese, que el porcentaje de error en los desplazamientos, es inferior al porcentaje de error en los esfuerzos, debido a que los esfuerzos son hallados utilizando las primeras

derivadas de las funciones de interpolación, y que representan el motivo por el cual se han degradado los resultados.

Por otra parte, los dos elementos utilizados resultan insuficientes para poder obtener resultados adecuados, que podrían ser alcanzados al aumentar el número de elementos con el que se formaría un mallado riguroso, que sin duda alguna, requeriría de un mayor procesamiento numérico.

#### 4.2.10 Ejemplo computacional y manual utilizando elementos de cuatro nodos

Considérese el ejemplo del apartado anterior, tomando en cuenta el caso de Elasticidad bidimensional en Deformación Plana y con espesor de un metro. Con este ejemplo se realizara la comparativa entre las soluciones de elementos finitos otorgadas por los programas SAP2000 y Phase2, además de realizar un cálculo manual.

El modelo de cálculo y las cargas actuantes utilizadas en el programa SAP2000, se presentan en la siguiente figura:

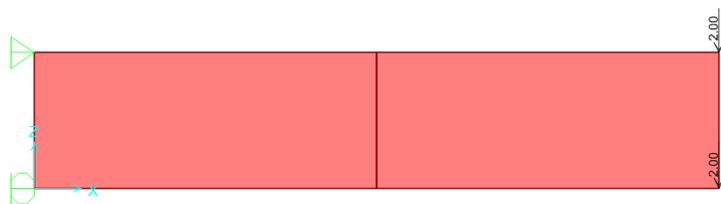


Figura 28. Modelo de cálculo de elementos de cuatro nodos en SAP2000

Los desplazamientos verticales hallados en cada punto del sistema pueden ser presentados a partir de un gráfico de contornos de igual desplazamiento vertical. De la misma manera podría obtenerse dichos gráficos para los esfuerzos inducidos.

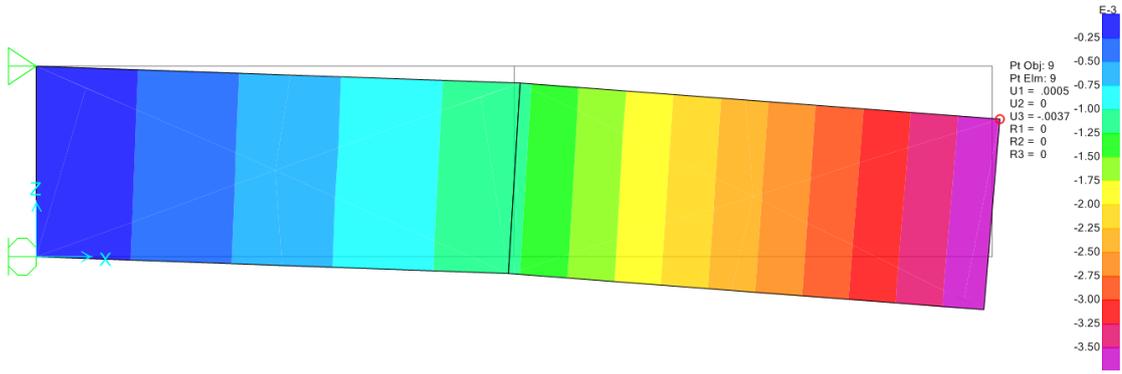


Figura 29. Desplazamientos verticales para elementos de cuatro nodos en SAP2000

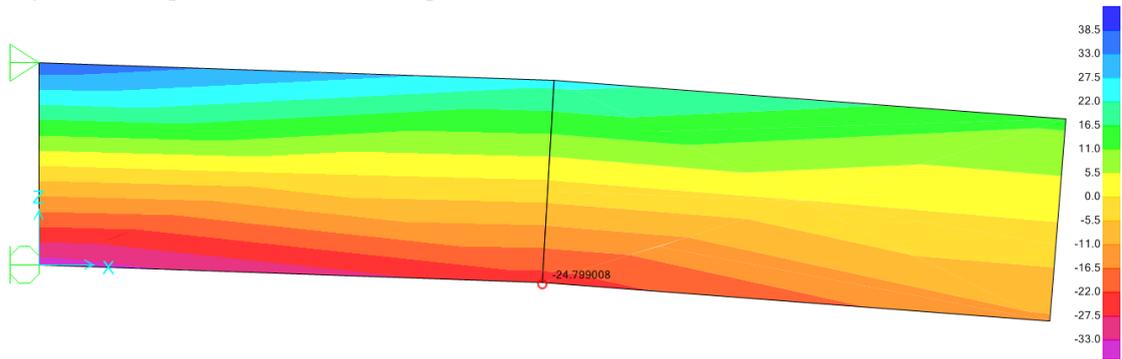


Figura 30. Esfuerzos horizontales para elementos de cuatro nodos en SAP2000

El modelo de cálculo y las cargas actuantes utilizadas en el programa Phase2, se presentan en la siguiente figura:

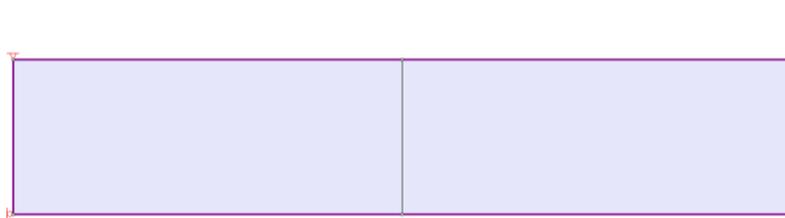


Figura 31. Modelo de cálculo de elementos de cuatro nodos en Phase 2

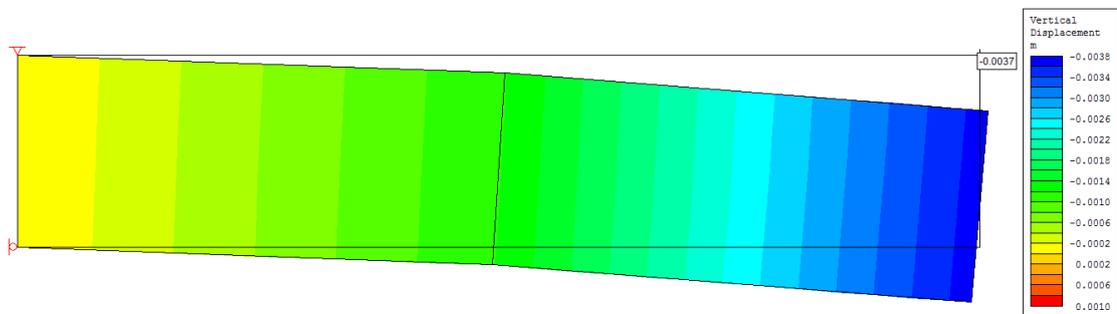


Figura 32. Desplazamientos verticales para elementos de cuatro nodos en Phase 2

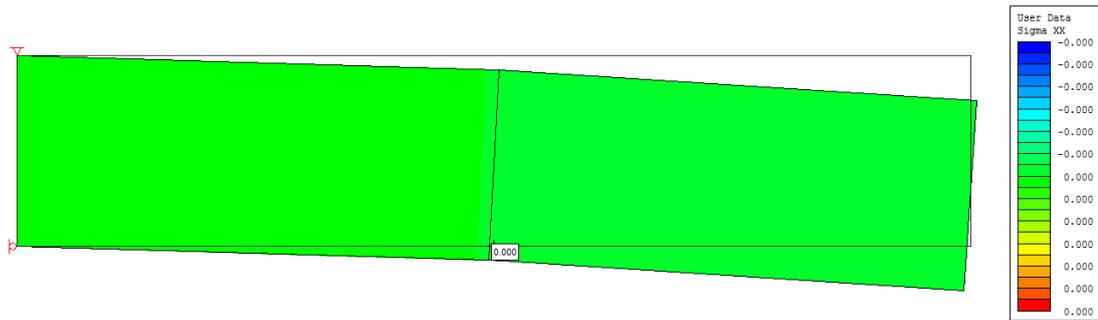


Figura 33. Esfuerzos horizontales para elementos de tres nodos en Phase 2

Podrá notarse que ambos programas entregan una misma solución a nivel de desplazamientos, pero esto no se refleja al verificar el estado de esfuerzos en el programa Phase2, notándose esfuerzos horizontales nulos a comparación de los esfuerzos obtenidos en SAP2000. Por otra parte, los resultados de un cálculo manual se presentaran a posterior (ver apendice B) y con resultados idénticos a los entregados por el programa SAP2000.

#### 4.2.11 Comportamiento del elemento finito bidimensional de cuatro nodos

La evaluación del comportamiento del elemento finito bidimensional de 4 nodos, se centra en la evaluación convergente que este posee, y para ello, se han preparado los siguientes gráficos que muestran los resultados de desplazamientos y esfuerzos en función al incremento de grados de libertad de la viga en voladizo presentada en el ejemplo del apartado 4.2.9.

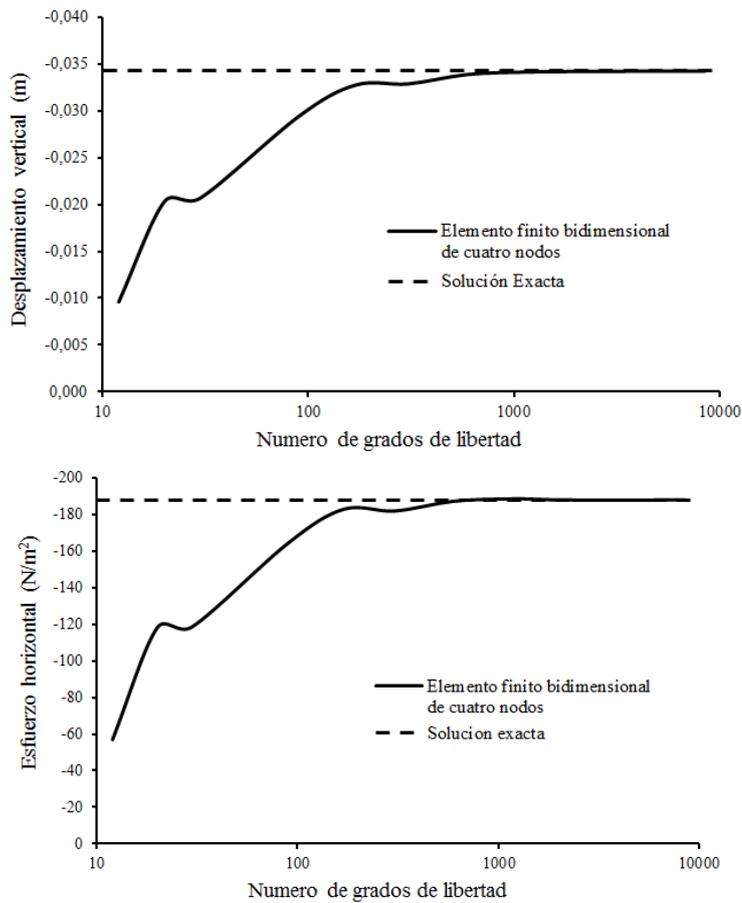


Figura 34. Comportamiento del elemento finito de 4 nodos

Los gráficos anteriores demuestran una vez más que los desplazamientos a diferencia de los esfuerzos, convergen con mayor rapidez, y que a partir de los doscientos grados de libertad será posible obtener resultados aceptables para este elemento. Por otra parte, podrá notarse también que este elemento converge con mayor rapidez a diferencia del elemento de tres nodos, debido a la menor cantidad de grados de libertad utilizados. Debe tenerse en cuenta que el ejemplo realizado posee predominancia a flexión, lo cual requirió de una considerable cantidad de grados de libertad, en contraste a la pequeña cantidad de grados de libertad que se requerirían para un problema de predominancia en tracción o compresión.

### 4.3 Elemento finito bidimensional de nueve nodos

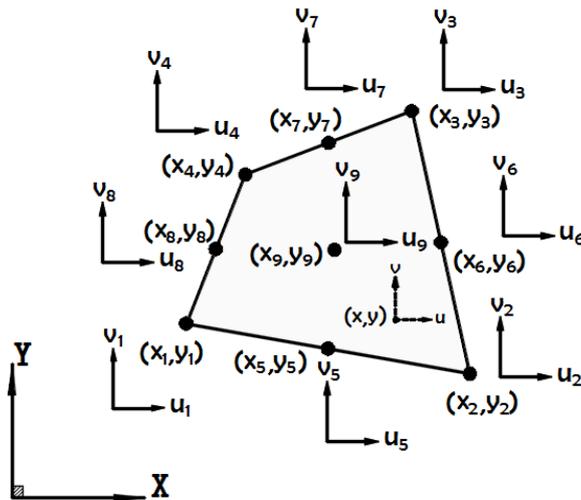


Figura 35. Elemento finito bidimensional de nueve nodos

La formulación del Elemento Finito de 9 nodos que será desarrollada en este apartado, seguirá procedimientos bastante similares a los que se utilizó para generar el elemento finito de 4 nodos, por ello, se hará uso nuevamente de la formulación Isoparametrica.

Históricamente este elemento represento un referente para la precisión que debían poseer muchos de los elementos finitos que se formulaban a partir de la década de los setentas, por ello, es de vital importancia desarrollarlo en esta investigación.

Este elemento posee una elevada precisión debido a la cantidad de grados de libertad que lo conforman (18 grados de libertad). Por otra parte, este elemento posee un elevado coste en cuanto a la cantidad de matrices o cálculos que se deben de realizar para formarlo, es por ello, que en la práctica no es usual utilizarlo para dar solución a problemas de Ingeniería, y su uso solo se limita a casos en los que se quiera comparar la precisión de una formulación realizada.

### 4.3.1 Funciones de desplazamiento

El uso de la formulación Isoparametrica, simplifica la obtención de las funciones de interpolación, por ello, a continuación se presentaran funciones de interpolación para el elemento finito de 9 nodos o también denominado elemento finito langraguiano de 9 nodos.

#### 4.3.1.1 Funciones de interpolación

Las funciones de interpolación para el Elemento Finito Bidimensional de 9 Nodos se expresan en el Sistema Natural de Coordenadas para cada nodo, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{(1-r)(1-s)}{4} - \frac{(1-r^2)(1-s)}{4} - \frac{(1-r)(1-s^2)}{4} + \frac{(1-r^2)(1-s^2)}{4} \\
 N_2 &= \frac{(1+r)(1-s)}{4} - \frac{(1-r^2)(1-s)}{4} - \frac{(1+r)(1-s^2)}{4} + \frac{(1-r^2)(1-s^2)}{4} \\
 N_3 &= \frac{(1+r)(1+s)}{4} - \frac{(1+r)(1-s^2)}{4} - \frac{(1-r^2)(1+s)}{4} + \frac{(1-r^2)(1-s^2)}{4} \\
 N_4 &= \frac{(1-r)(1+s)}{4} - \frac{(1-r^2)(1+s)}{4} - \frac{(1-r)(1-s^2)}{4} + \frac{(1-r^2)(1-s^2)}{4} \\
 N_5 &= \frac{(1-r^2)(1-s)}{2} - \frac{(1-r^2)(1-s^2)}{2} \\
 N_6 &= \frac{(1+r)(1-s^2)}{2} - \frac{(1-r^2)(1-s^2)}{2} \\
 N_7 &= \frac{(1-r^2)(1+s)}{2} - \frac{(1-r^2)(1-s^2)}{2} \\
 N_8 &= \frac{(1-r)(1-s^2)}{2} - \frac{(1-r^2)(1-s^2)}{2} \\
 N_9 &= (1-r^2)(1-s^2) \dots\dots\dots \text{Ecuación (133)}
 \end{aligned}$$

El termino langraguiano, hace referencia a que estas funciones de interpolación, pueden ser halladas a partir del producto de dos polinomios unidimensionales de Lagrange, y la obtención de estas funciones, pueden ser encontrados en (Zienkiewicz & Taylor, 1994) y (Oñate, 1991).

**4.3.1.2 Expresión final de las funciones de desplazamiento.**

Las expresiones finales de las funciones de desplazamiento para el sistema de coordenadas Naturales pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3 + N_4 u_4 + N_5 u_5 + N_6 u_6 + N_7 u_7 + N_8 u_8 + N_9 u_9 \quad \dots \text{Ecuación (134)}$$

$$v = N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3 + N_4 v_4 + N_5 v_5 + N_6 v_6 + N_7 v_7 + N_8 v_8 + N_9 v_9 \quad \dots \text{Ecuación (135)}$$

Por otra parte, es conveniente expresar las ecuaciones (134) y (135) en forma matricial, para obtener:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \\ u_6 \\ v_6 \\ u_7 \\ v_7 \\ u_8 \\ v_8 \\ u_9 \\ v_9 \end{bmatrix} \quad (136)$$

Es conveniente expresar la anterior expresión en forma compacta, teniéndose así:

$$[U] = [N][d] \quad \dots \text{Ecuación (137)}$$

Esta expresión compacta establece la relación que tiene el desplazamiento  $[U]$  de un punto cualquiera con los desplazamientos nodales  $[d]$  del elemento.

### 4.3.2 Relación deformación - desplazamiento

El estado de deformaciones para un caso bidimensional fue presentado en la Figura 6, y podrá notarse que será necesario rescatar las deformaciones unitarias para el plano  $XY$  del juego de ecuaciones (9), teniéndose:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (138)}$$

Estas últimas relaciones pueden ser expresadas en la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (139)}$$

Y es conveniente realizar la sustitución de la matriz que se encuentra en función de derivadas parciales, para obtener:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\partial] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (140)}$$

Nótese que la expresión (139) es idéntica a la expresión (54) del apartado 4.1, en la que se denominó a  $[\partial]$ , como un operador conveniente en derivadas parciales para un sistema de coordenadas cartesianas, dado como:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (141)}$$

Este operador  $[\partial]$  fue transformado en el apartado 4.2.3 para el sistema de coordenadas naturales, y se presenta nuevamente en este apartado, como:

$$[\partial] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (142)}$$

Donde  $[J]$  es el Jacobiano de la Transformación, que será calculado a través de:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (143)}$$

Por otra parte, si la ecuación (142) es reemplazada en la ecuación (140) se tendrá la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (144)}$$

Que puede ser expresada en la siguiente forma compacta:

$$[\varepsilon] = [\partial][U] \dots\dots\dots \text{Ecuación (145)}$$

Los desplazamientos  $[U]$  fueron establecidos mediante la ecuación (137) y reemplazándola en la ecuación (145) se obtiene la siguiente expresión compacta:

$$[\varepsilon] = [\partial][N][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (146)}$$

Es posible expresar al producto del operador  $[\mathcal{D}]$  y las funciones de forma  $[N]$  a partir de la expresión compacta  $[B]$ , entonces esta última se expresa como:

$$[B] = [\mathcal{D}][N] \dots\dots\dots \text{Ecuación (147)}$$

De modo que la ecuación (146) sea reescrita como:

$$[\mathcal{E}] = [B][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (148)}$$

Esta última expresión establece la relación entre deformaciones  $[\mathcal{E}]$  y desplazamientos nodales  $[d]$ , a través de la Matriz  $[B]$  denominada como matriz funciones de interpolación de deformaciones y se obtiene reemplazando la ecuación (142), y la matriz de funciones de interpolación  $[N]$  en la ecuación (147), para dar lugar a:

$$[B] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 \end{bmatrix} \quad (149)$$

Por simplicidad, la expresión  $[B]$  podrá subdividirse en dos componentes denominados  $[B_1]$  y  $[B_2]$ , escribiéndose en forma compacta como:

$$[B] = [B_1][B_2] \dots\dots\dots \text{Ecuación (150)}$$

En la que los términos de  $[B_1]$  y  $[B_2]$  son rescatados de la ecuación (149) como:

$$[B_1] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (151)}$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 & N_7 & 0 & N_8 & 0 & N_9 \end{bmatrix} \text{Ecuación (152)}$$

Por otra parte  $[B_2]$  implica un producto matricial, que puede ser desarrollado para obtener la siguiente expresión:

$$[B_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_9}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_9}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_9}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_7}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_9}{\partial s} \end{bmatrix} \text{(153)}$$

Al observarse la matriz  $[B_1]$ , podrá notarse que se requiere de las derivadas de las variables  $x$  e  $y$ , que expresan interpolación geométrica dentro del elemento de estudio y para ello es preciso aprovechar la formulación isoperimétrica, la misma que establece que la geometría puede ser interpolada usando las mismas funciones que se usan para interpolar los desplazamientos, así las expresiones de interpolación geométrica son análogas a las de interpolación de desplazamientos y resultan:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8 + N_9 x_9 \quad (154)$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 + N_5 y_5 + N_6 y_6 + N_7 y_7 + N_8 y_8 + N_9 y_9 \quad (155)$$

La matriz  $[B_2]$ , requiere de derivar parcialmente a las funciones de interpolación, las cuales solo requerirán de procedimientos del cálculo matemático.

### 4.3.3 Matriz de rigidez

El Principio de Trabajos Virtuales (PTV), desarrollado en el apartado 2.2.2 proporciono la expresión de la matriz de rigidez, y se presenta de nuevo aquí como:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \dots\dots\dots \text{Ecuación (156)}$$

Esta expresión obtenida para un caso tridimensional, puede ser establecida para un caso bidimensional cuando el diferencial de volumen  $dV$  es obtenido como el producto del espesor constante  $t$  por el diferencial de área  $dA$ , teniéndose así:

$$[K] = \int_A [B]^T [D] [B] t dA \dots\dots\dots \text{Ecuación (157)}$$

Por otra parte, la ecuación anterior implica una integración en el área del elemento, establecida para el sistema de coordenadas naturales, en la que el área del elemento varia de -1 a +1 para cada dirección, con lo cual la ecuación (157) se reescribe como:

$$[K] = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr ds \dots\dots\dots \text{Ecuación (158)}$$

Es fundamental mencionar que el cálculo de la matriz de rigidez no seguirá un procedimiento analítico como el seguido para el elemento de tres nodos mostrado en el apartado 4.1.3, sino más bien, deberá recurrirse a Métodos Numéricos, tales como el método de Gauss-Legendre que será presentado a continuación.

### 4.3.3.1 Integración Numérica.

La integración numérica a realizar corresponde al método de Gauss-Legendre, este tipo de integración, implica a la sumatoria del producto de la función evaluada en unos puntos establecidos y unos coeficientes denominados “Pesos”. Esta definición es la que convierte a la ecuación (158), a la forma:

$$[K] = t \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_s} [B(r_i, s_j)]^T [D] [B(r_i, s_j)] \det[J(r_i, s_j)] W_{ir} W_{js} \quad \dots \text{Ecuación (159)}$$

El elemento finito de 9 nodos es un elemento de mayor orden y requiere de 9 puntos de Gauss-Legendre, para ello los pesos y puntos de evaluación son mostrados en el siguiente gráfico:

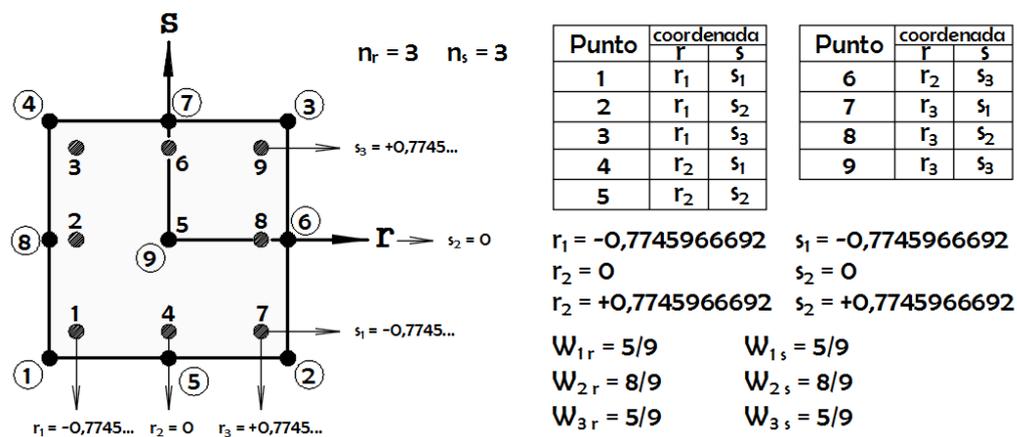


Figura 36. Cuadratura de Gauss-Legendre (9 Puntos)

Desarrollando la ecuación (159), para el caso de la cuadratura de 9 puntos se tiene:

$$\begin{aligned}
[K] = & t [B(r_1, s_1)]^T [D] [B(r_1, s_1)] \det[J(r_1, s_1)] W_{1r} W_{1s} + \\
& t [B(r_1, s_2)]^T [D] [B(r_1, s_2)] \det[J(r_1, s_2)] W_{1r} W_{2s} + \\
& t [B(r_1, s_3)]^T [D] [B(r_1, s_3)] \det[J(r_1, s_3)] W_{1r} W_{3s} + \\
& t [B(r_2, s_1)]^T [D] [B(r_2, s_1)] \det[J(r_2, s_1)] W_{2r} W_{1s} + \\
& t [B(r_2, s_2)]^T [D] [B(r_2, s_2)] \det[J(r_2, s_2)] W_{2r} W_{2s} + \\
& t [B(r_2, s_3)]^T [D] [B(r_2, s_3)] \det[J(r_2, s_3)] W_{2r} W_{3s} + \\
& t [B(r_3, s_1)]^T [D] [B(r_3, s_1)] \det[J(r_3, s_1)] W_{3r} W_{1s} + \\
& t [B(r_3, s_2)]^T [D] [B(r_3, s_2)] \det[J(r_3, s_2)] W_{3r} W_{2s} + \\
& t [B(r_3, s_3)]^T [D] [B(r_3, s_3)] \det[J(r_3, s_3)] W_{3r} W_{3s} + \dots \dots \dots \text{Ecuación (160)}
\end{aligned}$$

Y esta última expresión de la matriz se efectúa al reemplazar los valores mostrados en la Figura 36, en cada una de las matrices que se vienen multiplicando y sumando.

#### 4.3.4 Cálculo de desplazamientos

El cálculo de desplazamientos consiste en establecer el equilibrio del sistema completo a través de una expresión análoga a la que fue establecida en el Principio de Trabajos virtuales, teniéndose así:

$$[F_{EST}] = [K_{EST}] [d_{EST}] \dots \dots \dots \text{Ecuación (161)}$$

Por tanto el cálculo de los desplazamientos del elemento de este apartado, seguirá los mismos pasos que se describieron en el apartado 4.1.4, por ello, se recomienda al lector volver a dicha sección para revisar el procedimiento de cálculo.

#### 4.3.5 Relación esfuerzo - deformación

El estado de esfuerzos para un caso bidimensional fue presentado en el apartado 2.2.1.3, en el cual se tiene la posibilidad de elegir dos estados 1) para los casos de esfuerzo en el plano a través de la ecuación (16) y 2) para los casos de

deformación en el plano a través de la ecuación (18), podrá notarse también, que ambos casos se presentan en forma compacta y se escriben de la forma:

$$[\sigma] = [D][\mathcal{E}] \dots\dots\dots \text{Ecuación (162)}$$

Esta ecuación se encuentra en función de la matriz constitutiva  $[D]$  y de las deformaciones unitarias  $[\mathcal{E}]$  que fueron encontradas en la ecuación (148), que al ser reemplazada en la ecuación (162), se obtiene:

$$[\sigma] = [D][B][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (163)}$$

Esta expresión proporcionara el estado de esfuerzos para cada elemento, cuando los desplazamientos  $[d]$  se hayan calculado realizando el procedimiento del apartado 4.1.4. Por otra, parte el elemento no tendrá un estado tensional constante debido a que las derivadas de la matriz de interpolación de deformación  $[B]$  han sido evaluadas nueve veces, para los nueve puntos de Gauss que fueron utilizados, entendiéndose con esto, que deberá evaluarse un estado de esfuerzos para los nueve puntos, y que son definidos mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} [\sigma_{PG1}] &= [D][B(r_1, s_1)][d] & [\sigma_{PG6}] &= [D][B(r_2, s_3)][d] \\ [\sigma_{PG2}] &= [D][B(r_1, s_2)][d] & [\sigma_{PG7}] &= [D][B(r_3, s_1)][d] \\ [\sigma_{PG3}] &= [D][B(r_1, s_3)][d] & [\sigma_{PG8}] &= [D][B(r_3, s_2)][d] \\ [\sigma_{PG4}] &= [D][B(r_2, s_1)][d] & [\sigma_{PG9}] &= [D][B(r_3, s_3)][d] \\ [\sigma_{PG5}] &= [D][B(r_2, s_2)][d] & & \end{aligned} \text{Ecuación (164)}$$

Cabe resaltar, que estos esfuerzos ubicados en los puntos de gauss, son denominados también, puntos óptimos para el cálculo de esfuerzos, debido a que poseen mayor probabilidad de alcanzar resultados exactos, por el hecho de que durante todo el proceso de formulación se ha utilizado la cuadratura de Gauss-Legendre.

Por otra parte, si se desea hallar los esfuerzos nodales, se deberá realizar el procedimiento siguiente, denominado, Extrapolación de esfuerzos.

### 4.3.6 Extrapolación de esfuerzos

El procedimiento para la extrapolación de esfuerzos es muy similar a la que se realizó para en el apartado 4.2.7, con la diferencia de que en este capítulo se encontrara 9 estados de esfuerzos, correspondientes a los 9 nodos de este elemento.

A continuación se muestra en la siguiente figura, la correspondencia que tienen los puntos de gauss con las funciones de interpolación del elemento.

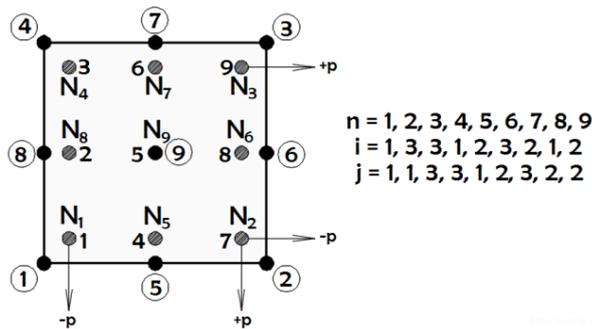


Figura 37. Correspondencia entre puntos de Gauss y funciones de interpolación para el elemento finito bidimensional de 9 nodos

A partir de la anterior figura se puede establecer la interpolación como:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{in}] = & (N_1)[\sigma_{PG1}] + (N_2)[\sigma_{PG7}] + (N_3)[\sigma_{PG9}] + (N_4)[\sigma_{PG3}] + (N_5)[\sigma_{PG4}] \\
 & + (N_6)[\sigma_{PG8}] + (N_7)[\sigma_{PG6}] + (N_8)[\sigma_{PG2}] + (N_9)[\sigma_{PG9}]
 \end{aligned}
 \tag{Ecuación 165}$$

Y la extrapolación hacia los nodos podrá ser evaluada como:

$$\begin{aligned}
 [\sigma_{Exn}] = & \left( N_1 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG1}] + \left( N_2 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG7}] + \left( N_3 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG9}] + \\
 & \left( N_4 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG3}] + \left( N_5 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG4}] + \left( N_6 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG8}] + \\
 & \left( N_7 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG6}] + \left( N_8 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG2}] + \left( N_9 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG9}]
 \end{aligned}
 \tag{Ecuación 166}$$

Esta expresión deberá ser desarrollada para los 9 nodos, al seguir la secuencia n, i, j de la Figura 37.

Los valores de  $r_1$ ,  $s_1$ ,  $r_2$ ,  $s_2$  y  $r_3$ ,  $s_3$  pueden ser obtenidos a partir de la Figura 36, y en los casos en que se desee calcular el estado de esfuerzos para los nodos 5 y 7, se deberá hacer que  $1/r_i = 0$ , cuando se desee calcular el estado de esfuerzos para los nodos 8 y 6 se deberá hacer  $1/s_j = 0$  y cuando se desee calcular el estado de esfuerzos para el nodo 9, se deberá hacer  $1/r_i = 1/s_j = 0$ .

#### 4.3.7 Alisado de esfuerzos

Una vez calculados los esfuerzos en los nodos, estos presentaran valores distintos para un nodo común al que concurren una cierta cantidad de elementos, por ello deberá seguirse un procedimiento similar al que se siguió en el apartado 4.1.6, con la diferencia de que el estado de esfuerzos en un nodo, será tomado como el promedio de los esfuerzos extrapolados de los elementos que concurren al nodo.

#### 4.3.8 Ejemplo para el elemento finito bidimensional de nueve nodos

Considérese a la viga en voladizo sujeta a cargas de corte P mostradas en la siguiente figura:

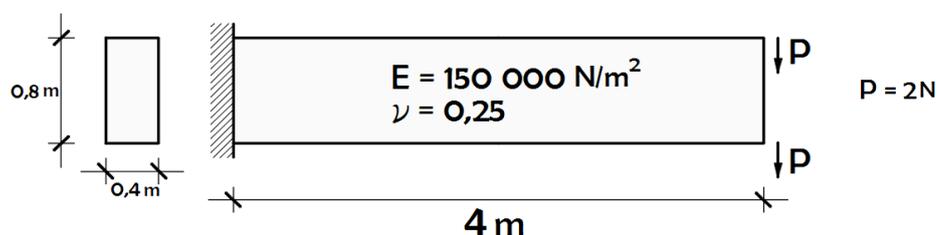


Figura 38. Viga en voladizo sujeta a cargas de corte

La viga mostrada puede ser solucionada utilizando el método de elementos finitos, considerando el caso de esfuerzo plano, y para ello, se requiere de un modelo de

cálculo en el cual se realice la discretización del continuo en una cierta cantidad de elementos bidimensionales de 9 Nodos, tal como el mostrado a continuación.

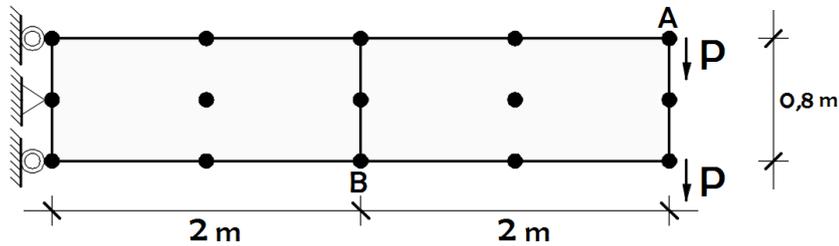


Figura 39. Modelo de cálculo y discretización utilizando elementos de nueve nodos

#### 4.3.8.1 Resultados.

La metodología de evaluación, estima el error obtenido por la siguiente expresión:

$$\%error = \left( \frac{\text{analizado}}{\text{exacto}} - 1 \right) \times 100 \dots\dots\dots \text{Ecuación (167)}$$

Y la siguiente tabla presenta los resultados del análisis por elementos finitos para el desplazamiento en el punto A y el esfuerzo extrapolado y alisado en la dirección horizontal en el punto B, los cuales serán comparados con un cálculo exacto, proporcionado por la Teoría de Vigas.

**Tabla 3**

*Resultados de esfuerzos y desplazamientos – Elemento de nueve nodos*

Modelo	Desp. vertical (m)	%error	Esfuerzo horizontal (N/m <sup>2</sup> )	%error
Exacto	-0,0343	-	-187,5	-
9 Nodos bidimensional	-0,0336	-2,04	-185,752	-0,93

La tabla anterior muestra los resultados que ofrece una malla de 2 elementos finitos bidimensionales de 9 Nodos, y podrá notarse que los resultados se aproximan bastante a los resultados correctos, por ello, el elemento de 9 nodos

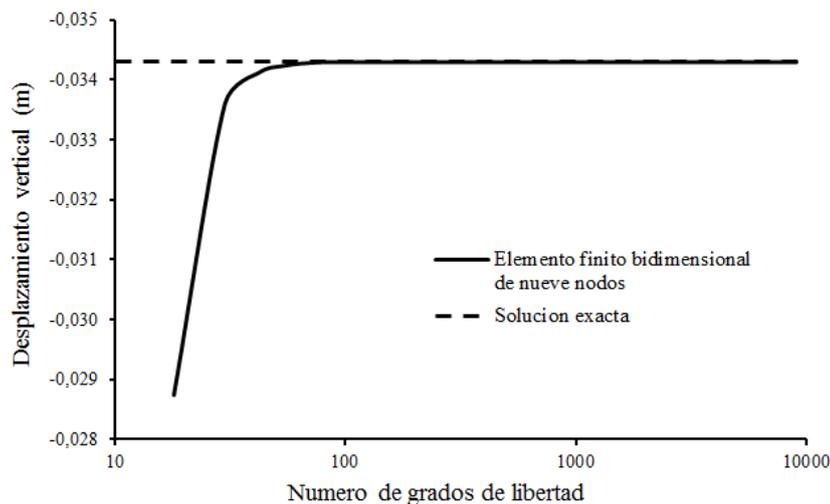
puede ser considerado como un elemento altamente eficiente, y que podría ser tomado como un referente para el desempeño de las distintas formulaciones.

#### 4.3.9 Ejemplo manual utilizando elementos de nueve nodos

Un ejemplo manual del elemento de nueve nodos es presentado a posterior (ver apendice C), lo cual servirá para evaluar los demás elementos a ser formulados.

#### 4.3.10 Comportamiento del elemento finito bidimensional de nueve nodos

La evaluación del comportamiento del elemento finito bidimensional de nueve nodos, se centra en la evaluación convergente que este posee, y para ello, se han preparado los siguientes gráficos que muestran los resultados de desplazamientos y esfuerzos en función al incremento de grados de libertad de la viga en voladizo presentada en el ejemplo del apartado 4.3.8.



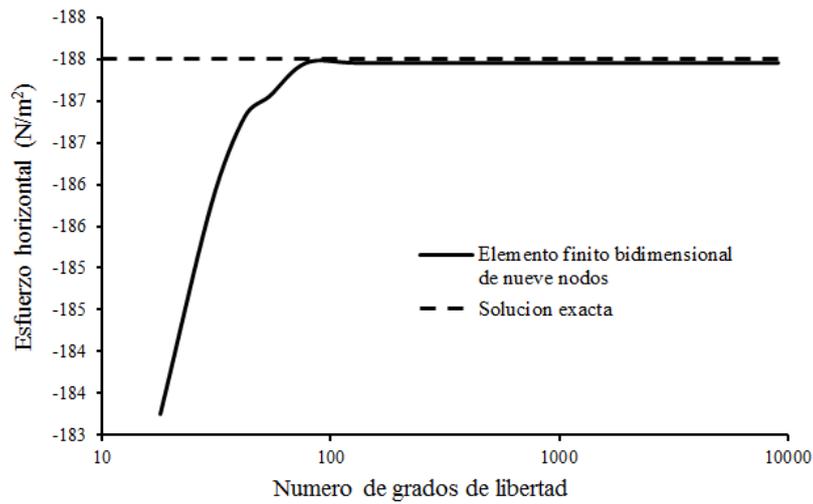


Figura 40. Comportamiento del elemento finito de 9 nodos

Los gráficos anteriores demuestran que a partir de los ochenta grados de libertad será posible obtener resultados exactos y que bastara con 30 grados de libertad para obtener resultados que puedan ser considerados aceptables a nivel ingenieril. Por otra parte, podrá notarse también que este elemento converge con mayor rapidez a diferencia del elemento de tres nodos y cuatro nodos.

#### 4.4 Elemento finito bidimensional de cuatro nodos con modos incompatibles

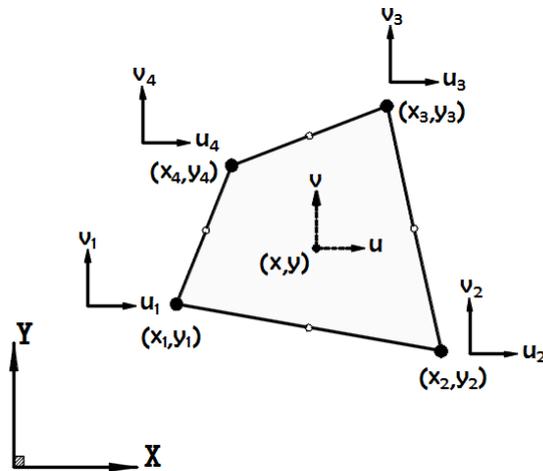


Figura 41. Elemento finito de cuatro nodos con modos incompatibles

El elemento que se presenta en este apartado, surge debido a los inconvenientes que presenta el elemento de 4 nodos del apartado 4.2, inconvenientes como los de no poder representar un adecuado estado predominante en flexión, debido a que este elemento posee lados rectos, que imposibilitan adoptar formas curvas como la que proporciona un estado de flexión pura. Por otra parte, este elemento a diferencia del elemento altamente eficiente de nueve nodos, requerirá de un menor procesamiento numérico.

Este elemento fue presentado por primera vez en el año 1971 por los investigadores Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. P. Doherty y J. Ghaboussi, en la conferencia “Métodos Numéricos y Computacionales en la Mecánica Estructural”, en la que los asistentes recibieron la formulación con gran escepticismo, debido a que el elemento violaba uno de los requisitos fundamentales hasta ese momento, la Compatibilidad. El violar la compatibilidad, provoca que dos elementos que compartan un punto del continuo, provean un estado de deformación diferente por

cada uno de ellos. Esto califica entonces a este elemento como un elemento “No conforme”

#### 4.4.1 Funciones de desplazamiento

Las funciones de desplazamiento del típico elemento de cuatro nodos, no son capaces de describir un estado deformado de flexión pura, y para demostrar esto, bastara con examinar las ecuaciones, correspondientes a la solución que dicho elemento provee.

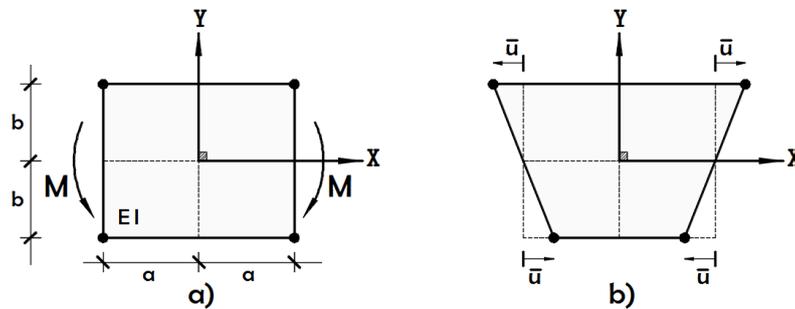


Figura 42. Problema de flexión pura para el elemento de 4 nodos

$$u = \bar{u}xy \quad v = 0 \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (168)}$$

La ecuación (168) provee la solución del elemento de cuatro nodos a un problema de flexión pura. Esta solución puede ser vista a partir de la Figura 43, en la que se confirma que este elemento no puede adoptar las deformaciones propias de un estado en flexión pura, como la que es mostrada en la Figura 43.

Por otra parte, la solución exacta del problema de flexión pura, puede ser obtenida a partir de la teoría de vigas (Timoshenko & Goodier, 1972), y se expresa mediante las siguientes ecuaciones:

$$u = \frac{Mxy}{EI} \quad v = \frac{Ma^2}{2EI} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) + \frac{\nu Mb^2}{2EI} \left( 1 - \frac{y^2}{b^2} \right) \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (169)}$$

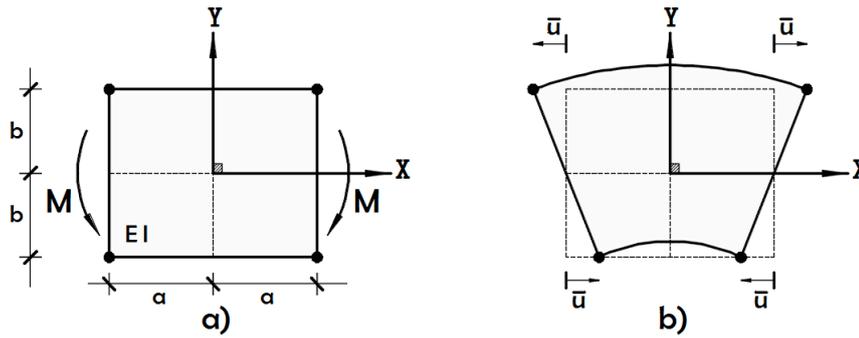


Figura 43. Deformación exacta de un problema en flexión pura

Este juego de ecuaciones evidencia claramente la existencia de deformaciones verticales expresadas a partir de dos funciones de interpolación que no posee el elemento típico de 4 nodos. Entonces será necesario añadir dichas funciones de interpolación, que a su vez crearan grados de libertad que podrán eliminarse tras realizarse una condensación estática.

#### 4.4.1.1 Funciones de Interpolación.

Las funciones de interpolación para este elemento con modos incompatibles son las funciones serendiptitas bilineales del típico elemento de 4 nodos:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) & N_2 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\
 N_3 &= \frac{1}{4}(1+r)(1+s) & N_4 &= \frac{1}{4}(1-r)(1+s)
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots \text{Ecuación (170)}$$

A las que se suman las siguientes funciones de interpolación que le faltan para poder reproducir un estado de flexión pura:

$$\begin{aligned}
 N_5 &= 1 - r^2 \\
 N_6 &= 1 - s^2
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots \text{Ecuación (171)}$$

Estas se denominaran en adelante como funciones de interpolación incompatibles.

**4.4.1.2 Expresión final de las Funciones de Desplazamiento.**

Las expresiones finales de las funciones de desplazamiento para el sistema de coordenadas Naturales pueden ser expresadas de la siguiente manera:

$$u = N_1u_1 + N_2u_2 + N_3u_3 + N_4u_4 + N_5\alpha_{x5} + N_6\alpha_{x6} \dots\dots\dots \text{Ecuación (172)}$$

$$v = N_1v_1 + N_2v_2 + N_3v_3 + N_4v_4 + N_5\alpha_{y5} + N_6\alpha_{y6} \dots\dots\dots \text{Ecuación (173)}$$

Donde  $\alpha_{x5}$ ,  $\alpha_{x6}$ ,  $\alpha_{y5}$  y  $\alpha_{y6}$  son los modos de desplazamiento incompatible que a su vez son grados de libertad que podrán ser eliminados posteriormente, a partir de procedimientos tales como condensación estática.

Por otra parte es conveniente expresar las ecuaciones (172) y (173), en forma matricial, para obtener:

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ \alpha_{x5} \\ \alpha_{y5} \\ \alpha_{x6} \\ \alpha_{y6} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (174)}$$

La expresión compacta de la anterior expresión queda definida a partir de la siguiente ecuación:

$$[U] = [N][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (175)}$$

Que establece la relación que tiene el desplazamiento  $[U]$  de un punto cualquiera con los desplazamientos nodales  $[d]$  del elemento.

#### 4.4.2 Relación deformación - desplazamiento

El estado de deformaciones para un caso bidimensional fue presentado en la Figura 6, y podrá notarse que será necesario rescatar las deformaciones unitarias para el plano  $XY$  del juego de ecuaciones (9), teniéndose:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (176)}$$

Estas últimas relaciones pueden ser expresadas en la siguiente forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (177)}$$

Y es conveniente realizar la sustitución de la matriz que se encuentra en función de derivadas parciales, para obtener:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [\partial] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (178)}$$

En la que  $[\partial]$ , es un operador conveniente en derivadas parciales para un sistema de coordenadas cartesianas, presentado como:

$$[\partial] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (179)}$$

Este operador  $[\partial]$ , fue transformado para el sistema de coordenadas naturales en el apartado 4.2.3, y se presenta nuevamente en este apartado como:

$$[\partial] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (180)}$$

Donde  $[J]$  es el Jacobiano de la Transformación, que será calculado a través de la siguiente expresión:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (181)}$$

Por otra parte, si la ecuación (180) es reemplazada en la ecuación (170) se tendrá la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (182)}$$

Expresando esta última matriz en forma compacta se tiene:

$$[\varepsilon] = [\partial][U] \dots\dots\dots \text{Ecuación (183)}$$

Los desplazamientos de un punto cualquier  $[U]$  fueron establecidos mediante la ecuación (137) y reemplazándola en la ecuación (183) se obtiene la siguiente expresión:

$$[\varepsilon] = [\partial][N][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (184)}$$

Es posible expresar al producto del operador  $[\partial]$  y las funciones de forma  $[N]$  a partir de la matriz  $[B]$ , entonces esta última se expresa como:

$$[B] = [\partial][N] \dots\dots\dots \text{Ecuación (185)}$$

De este modo la ecuación (184) se reescribe como:

$$[\varepsilon] = [B][d] \dots\dots\dots \text{Ecuación (186)}$$

Esta última expresión establece la relación entre deformaciones  $[\varepsilon]$  y desplazamientos nodales  $[d]$ , a través de la Matriz  $[B]$ , denominada como matriz funciones de interpolación de deformaciones y que es obtenida reemplazando la ecuación (180), y la matriz de funciones de interpolación  $[N]$  en la ecuación (185), obteniéndose lo siguiente:

$$[B] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \quad (187)$$

Por simplicidad, la expresión  $[B]$  podrá subdividirse en dos componentes denominados  $[B_1]$  y  $[B_2]$ , escribiéndose en forma compacta como:

$$[B] = [B_1][B_2] \dots\dots\dots \text{Ecuación (188)}$$

Los términos de  $[B_1]$  y  $[B_2]$  son rescatados de la ecuación (187) como:

$$[B_1] = \frac{1}{\det[J]} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ -\frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial s} & -\frac{\partial y}{\partial r} \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (189)}$$

$$[B_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 & N_5 & 0 & N_6 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (190)}$$

Por otra parte la matriz  $[B_2]$  implica un producto matricial, que puede ser desarrollado para obtener la siguiente expresión:

$$[B_2] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial r} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial s} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial r} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial r} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_5}{\partial s} & 0 & \frac{\partial N_6}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (191)$$

Al observarse la matriz  $[B_1]$ , podrá notarse que se requiere de las derivadas de las variables  $x$  e  $y$ , que expresan interpolación geométrica dentro del elemento de estudio y para ello es preciso aprovechar la formulación isoperimétrica, la misma que establece que la geometría puede ser interpolada usando las mismas funciones que se usan para interpolar los desplazamientos, así las expresiones de interpolación geométrica son análogas a las de interpolación de desplazamientos y resultan:

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \dots\dots\dots \text{Ecuación (192)}$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \dots\dots\dots \text{Ecuación (193)}$$

La matriz  $[B_2]$ , requiere de derivar parcialmente a las funciones de interpolación, y para ello, se requerirán de procedimientos del cálculo matemático.

#### 4.4.3 Matriz de rigidez

El Principio de Trabajos Virtuales (PTV), desarrollado en el apartado 2.2.2, proporciono la expresión de la matriz de rigidez, y se presenta de nuevo aquí como:

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \dots\dots\dots \text{Ecuación (194)}$$

Esta expresión obtenida para un caso tridimensional, puede ser establecida para un caso bidimensional cuando el diferencial de volumen  $dV$  es obtenido como el producto del espesor constante  $t$  por el diferencial de área  $dA$ , teniéndose así:

$$[K] = \int_A [B]^T [D] [B] t dA \dots\dots\dots \text{Ecuación (195)}$$

Por otra parte la ecuación anterior implica una integración en el área del elemento, establecida para el sistema de coordenadas naturales, en la que el área del elemento varia de -1 a +1 para cada dirección, con lo cual la ecuación (195) se reescribe como:

$$[K] = t \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B]^T [D] [B] \det[J] dr ds \dots\dots\dots \text{Ecuación (196)}$$

Es fundamental mencionar que el cálculo de la matriz de rigidez no seguirá un procedimiento analítico como el seguido para el elemento de tres nodos mostrado en el apartado 4.1.3, sino más bien, deberá recurrirse a métodos

numéricos, tales como el método de Gauss-Legendre que será presentado a continuación.

#### 4.4.3.1 Integración Numérica.

La integración numérica a realizar corresponde al método de Gauss-Legendre, este tipo de integración, implica a la sumatoria del producto de la función evaluada en unos puntos establecidos y unos coeficientes denominados “Pesos”. Esta definición es la que convierte a la ecuación (196), a la forma:

$$[K] = t \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_s} [B(r_i, s_j)]^T [D] [B(r_i, s_j)] \det[J(r_i, s_j)] W_{ir} W_{js} \quad \dots \text{Ecuación (197)}$$

La expresión numérica anterior para el caso de 4 puntos de Gauss-Legendre se desarrolla para los pesos y puntos de evaluación mostrados en el siguiente gráfico:

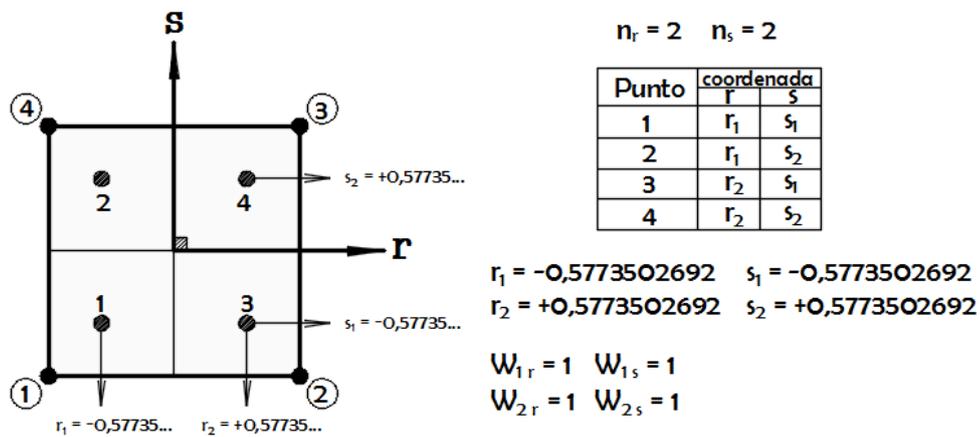


Figura 44. Cuadratura de Gauss-Legendre (4 Puntos)

#### 4.4.3.2 Corrección de la Matriz $[B]$ .

La compatibilidad de desplazamientos era uno de los requisitos fundamentales hasta antes de 1971, y una vez que se generó el elemento mostrado en este capítulo, se creó la prueba de la parcela o prueba de grupo (patch test), esto con el fin de validar a los elementos que generen incompatibilidad.

La prueba de la parcela, constituye una verificación de que tan competente puede llegar a ser una formulación de elementos finitos, y consiste en seleccionar un grupo de elementos e imponer un juego de desplazamientos nodales, correspondientes a un estado de Deformación Constante. Por otra parte, si se logra el equilibrio nodal sin imponer fuerzas nodales externas, y se obtiene un estado de esfuerzo constante, entonces podrá decirse que se satisface el criterio de deformación constante, garantizándose además la continuidad del desplazamiento interelemental (Oñate, 1991).

Para que el elemento presentado cumpla con la prueba de grupo, es necesario generar una corrección a la matriz  $[B]$  que relaciona desplazamientos con deformaciones (Wilson, 2008).

Por otro lado, debe tenerse en cuenta que la relación deformación-desplazamiento del elemento escrita en la ecuación (186), contiene términos compatibles e incompatibles que pueden ser vistos a partir de la siguiente forma compacta:

$$[\varepsilon] = [B_c \ B_I] \begin{bmatrix} d_c \\ \alpha \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (198)}$$

En la que la submatriz  $[B_c]$ , está asociada a los desplazamientos de tipo compatible  $[d_c]$  y la submatriz  $[B_I]$ , está asociada a los desplazamientos de tipo incompatible  $[\alpha]$ .

Visto esto, la corrección de la matriz  $[B]$ , deberá efectuarse únicamente a los términos incompatibles que contiene la submatriz  $[B_I]$ , y para ello, será necesario recurrir a la energía de deformación interna real o también denominado trabajo interno real, de la que se deriva la siguiente ecuación de corrección de los términos incompatibles:

$$[\bar{B}_I] = [B_I] + [B_{IC}] \dots\dots\dots \text{Ecuación (199)}$$

Donde  $[B_{IC}]$  está dada por la siguiente ecuación:

$$[B_{IC}] = -\frac{1}{A} \int_A [B_I] dA \dots\dots\dots \text{Ecuación (200)}$$

Estas ecuaciones poseen carácter general para la cantidad de modos incompatibles que se deseen agregar en casos bidimensionales.

Por otra parte, la integral de esta última ecuación, deberá ser realizada por la integración numérica de Gauss y para los mismos puntos con los que inicialmente fueron calculadas las matrices  $[B]$ . Por ello, la integración numérica de la submatriz  $[B_{IC}]$  quedaría expresada en forma compacta como:

$$[B_{IC}] = -\frac{1}{A} \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_s} [B_I(r_i, s_j)] \det[J(r_i, s_j)] W_{ir} W_{js} \dots\dots\dots \text{Ecuación (201)}$$

La misma que al ser desarrollada para los 4 puntos de Gauss, se tendría:

$$[B_{Ic}] = -\frac{1}{A} [B_I(r_1, s_1)] \det[J(r_1, s_1)] W_{1r} W_{1s} + [B_I(r_1, s_2)] \det[J(r_1, s_2)] W_{1r} W_{2s} + [B_I(r_2, s_1)] \det[J(r_2, s_1)] W_{2r} W_{1s} + [B_I(r_2, s_2)] \det[J(r_2, s_2)] W_{2r} W_{2s} \quad (202)$$

Donde  $A$  es el área del elemento que podrá ser calculado mediante la siguiente expresión numérica:

$$A = \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_s} \det[J(r_i, s_j)] W_{ir} W_{js} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (203)}$$

Y que al desarrollarla para los 4 puntos de Gauss utilizados, se obtendría:

$$A = \det[J(r_1, s_1)] W_{1r} W_{1s} + \det[J(r_1, s_2)] W_{1r} W_{2s} + \det[J(r_2, s_1)] W_{2r} W_{1s} + \det[J(r_2, s_2)] W_{2r} W_{2s} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (204)}$$

Los valores necesarios para las ecuaciones (202) y (204), pueden ser obtenidos de la Figura 44.

Una vez calculada la submatriz  $[\bar{B}_I]$ , esta deberá sustituir a la submatriz  $[B_I]$  de la ecuación (198), teniéndose:

$$[\mathcal{E}] = [B_C \quad \bar{B}_I] \begin{bmatrix} d_C \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (205)}$$

En la que finalmente la matriz  $[B]$  estará compuesta por las submatrices  $[B_C]$  y  $[\bar{B}_I]$ , tal como se muestra en la siguiente forma compacta:

$$[B] = [B_C \quad \bar{B}_I] \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (206)}$$

**4.4.3.3 Formación de la matriz de rigidez y condensación estática.**

Una vez realizado el procedimiento establecido en el apartado anterior, la expresión numérica de la matriz de rigidez presentada en la ecuación (197) podrá

ser escrita utilizando las submatrices de la matriz de relación deformación-desplazamiento  $[B]$ , que presenta la ecuación (206), con lo cual se tendrá:

$$[K] = t \sum_{i=1}^{n_r} \sum_{j=1}^{n_s} [B_C(r_i, s_j) \bar{B}_I(r_i, s_j)]^T [D] [B_C(r_i, s_j) \bar{B}_I(r_i, s_j)] \det[J(r_i, s_j)] W_{ir} W_{js} \quad (207)$$

Y que al desarrollarla, para una cuadratura de 4 puntos de Gauss obtenemos:

$$\begin{aligned} [K] = & t [B_C(r_1, s_1) \bar{B}_I(r_1, s_1)]^T [D] [B_C(r_1, s_1) \bar{B}_I(r_1, s_1)] \det[J(r_1, s_1)] W_{1r} W_{1s} + \\ & t [B_C(r_1, s_2) \bar{B}_I(r_1, s_2)]^T [D] [B_C(r_1, s_2) \bar{B}_I(r_1, s_2)] \det[J(r_1, s_2)] W_{1r} W_{2s} + \\ & t [B_C(r_2, s_1) \bar{B}_I(r_2, s_1)]^T [D] [B_C(r_2, s_1) \bar{B}_I(r_2, s_1)] \det[J(r_2, s_1)] W_{2r} W_{1s} + \\ & t [B_C(r_2, s_2) \bar{B}_I(r_2, s_2)]^T [D] [B_C(r_2, s_2) \bar{B}_I(r_2, s_2)] \det[J(r_2, s_2)] W_{2r} W_{2s} \end{aligned} \quad (208)$$

Esta última expresión se hace efectiva, al sustituir los valores mostrados en la Figura 44, en cada una de las matrices que se vienen multiplicando y sumando.

La matriz de rigidez formada a partir de la expresión (208), contiene términos de rigidez asociados a desplazamientos incompatibles, que podrán ser eliminados efectuando un proceso de condensación estática, para ello, debe tenerse en cuenta que la matriz de rigidez tendrá la siguiente forma:

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{CC} & K_{CI} \\ K_{IC} & K_{II} \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{Ecuación (209)}$$

Donde las submatrices  $[K_{CC}]$  y  $[K_{IC}]$ , son las rigideces asociadas a los desplazamientos compatibles y  $[K_{CI}]$  y  $[K_{II}]$ , son las rigideces asociadas a los desplazamientos incompatibles.

Finalmente la matriz de rigidez quedara expresada a partir de la siguiente ecuación que define condensación estática:

$$[K_C] = [K_{CC}] - [K_{CI}] [K_{II}]^{-1} [K_{IC}] \dots \dots \dots \text{Ecuación (210)}$$

Siendo esta última matriz  $[K_C]$ , la que tendrá que ser utilizada para efectuar el ensamblaje total del sistema.

#### 4.4.4 Cálculo de desplazamientos

El cálculo de desplazamientos consiste en establecer el equilibrio del sistema completo a través de una expresión análoga a la que fue establecida en el Principio de Trabajos virtuales, teniéndose así:

$$[F_{EST}] = [K_{EST}][d_{EST}] \dots\dots\dots \text{Ecuación (211)}$$

Por tanto, el cálculo de los desplazamientos del elemento de este apartado, seguirá los mismos pasos que se describieron en el apartado 4.1.4.

#### 4.4.5 Relación esfuerzo - deformación

El estado de esfuerzos para un caso bidimensional fue presentado en el apartado 2.2.1.3, en el cual se tiene la posibilidad de elegir dos estados 1) para los casos de Esfuerzo en el Plano a través de la ecuación (16) y 2) para los casos de Deformación en el Plano a través de la ecuación (18), podrá notarse también, que ambos casos se presentan en forma compacta y se escriben de la forma:

$$[\sigma] = [D][\epsilon] \dots\dots\dots \text{Ecuación (212)}$$

Esta expresión del estado de esfuerzos se encuentra en función de la matriz constitutiva  $[D]$  y de las deformaciones unitarias  $[\epsilon]$  encontradas en la ecuación (205), y que al ser reemplazadas en la ecuación (212), se obtiene:

$$[\sigma] = [D][B_C \bar{B}_I] \begin{bmatrix} d_C \\ \alpha \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (213)}$$

Esta expresión proporcionara el estado de esfuerzos para cada elemento, cuando los desplazamientos compatibles  $[d_C]$  se hayan calculado realizando el procedimiento del apartado 4.1.4 y los desplazamientos incompatibles  $[\alpha]$  sean calculados por la siguiente expresión, derivada del proceso de condensación estática:

$$[\alpha] = -[K_{II}]^{-1}[K_{IC}][d_C] \dots\dots\dots \text{Ecuación (214)}$$

Por otra, parte el elemento no tendrá un estado tensional constante debido a que las derivadas de la matriz de interpolación de deformación  $[B]$  han sido evaluadas cuatro veces, para los cuatro puntos de Gauss que fueron utilizados, entendiéndose con esto, que deberá evaluarse un estado de esfuerzos para los cuatro puntos, y que son definidos mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} [\sigma_{PG1}] &= [D][B_C(r_1, s_1) \bar{B}_I(r_1, s_1)] \begin{bmatrix} d_C \\ \alpha \end{bmatrix} \\ [\sigma_{PG2}] &= [D][B_C(r_1, s_2) \bar{B}_I(r_1, s_2)] \begin{bmatrix} d_C \\ \alpha \end{bmatrix} \\ [\sigma_{PG3}] &= [D][B_C(r_2, s_1) \bar{B}_I(r_2, s_1)] \begin{bmatrix} d_C \\ \alpha \end{bmatrix} \\ [\sigma_{PG4}] &= [D][B_C(r_2, s_2) \bar{B}_I(r_2, s_2)] \begin{bmatrix} d_C \\ \alpha \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{Ecuación (215)} \end{aligned}$$

Cabe resaltar, que estos esfuerzos ubicados en los puntos de gauss, son denominados también, puntos óptimos para el cálculo de esfuerzos, debido a que poseen mayor probabilidad de alcanzar resultados exactos, por el hecho de que durante todo el proceso de formulación se ha utilizado la cuadratura de Gauss-Legendre.

Por otra parte, si se desea hallar los esfuerzos nodales, se deberá realizar el procedimiento siguiente, denominado, Extrapolación de esfuerzos.

#### 4.4.6 Extrapolación y alisado de esfuerzos

El procedimiento para la extrapolación de esfuerzos es muy similar a la que se realizó para en el apartado 4.2.7, con la diferencia de que en este capítulo se encontrara cuatro estados de esfuerzos, correspondientes a los cuatro nodos de este elemento.

$$[\sigma_{Exn}] = \left( N_1 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG1}] + \left( N_2 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG3}] + \left( N_3 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG4}] + \left( N_4 \left( \frac{1}{r_i}, \frac{1}{s_j} \right) \right) [\sigma_{PG2}] \quad \text{Ecuación (216)}$$

La ecuación anterior podrá ser desarrollada para los 4 nodos, al seguir la secuencia de n, i, j de la Figura 24 del típico elemento finito bidimensional de cuatro nodos.

#### 4.4.7 Ejemplo para el elemento finito de cuatro nodos con modos incompatibles

Considérese a la viga en voladizo sujeta a cargas de corte P mostradas en la siguiente figura:

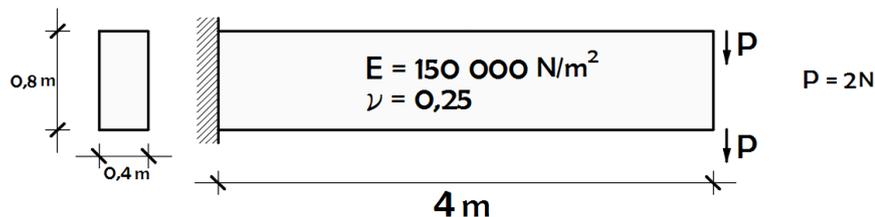


Figura 45. Viga en voladizo sujeta a cargas de corte

La viga mostrada puede ser solucionada utilizando el método de elementos finitos, considerando el caso de esfuerzo plano, y para ello, se requiere de un modelo de cálculo en el cual se realice la discretización del continuo en una cierta cantidad de elementos bidimensionales de 4 Nodos con modos incompatibles, tal como el mostrado a continuación.

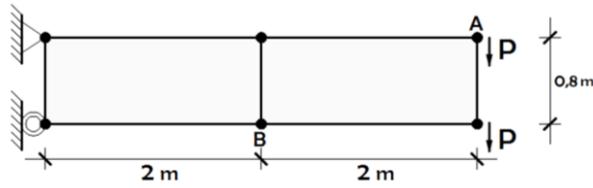


Figura 46. Modelo de cálculo y discretización usando elementos de modos incompatibles

#### 4.4.7.1 Resultados

La metodología de evaluación, estima el error obtenido por la siguiente expresión:

$$\%error = \left( \frac{\text{analizado}}{\text{exacto}} - 1 \right) \times 100 \dots\dots\dots \text{Ecuación (217)}$$

Y la siguiente tabla presenta los resultados del análisis por elementos finitos para el desplazamiento en el punto A y el esfuerzo extrapolado y alisado en la dirección horizontal en el punto B, los cuales serán comparados con un cálculo exacto, proporcionado por la Teoría de Vigas.

**Tabla 4**

*Resultados de esfuerzos y desplazamientos – Elemento de modos incomp.*

Modelo	Desp. vertical (m)	%error	Esfuerzo horizontal (N/m <sup>2</sup> )	%error
Exacto	-0,0343	-	-187,5	-
4 Nodos – Modos incomp.	-0,0321	-6,41	-187,5	0

La tabla anterior muestra los resultados que ofrece una malla de 2 elementos finitos bidimensionales de cuatro Nodos de modos incompatibles, y es posible afirmar que la adición de modos incompatibles mejora sustancialmente el desempeño del elemento típico de 4 nodos presentado en el apartado 4.2, mostrándose de esta manera que los resultados del desplazamiento se aproximan bastante al resultado exacto y los resultados de esfuerzo son idénticos al exacto.

#### 4.4.8 Ejemplo computacional y manual utilizando elementos incompatibles

Considérese el ejemplo del apartado anterior, tomando en cuenta el caso de Elasticidad bidimensional en Deformación Plana y con espesor de un metro. Con este ejemplo se realizara la comparativa entre las solución de elementos finitos otorgadas por el programa SAP2000, además de realizar un cálculo manual.

El modelo de cálculo y las cargas actuantes utilizadas en el programa SAP2000, se presentan en la siguiente figura:

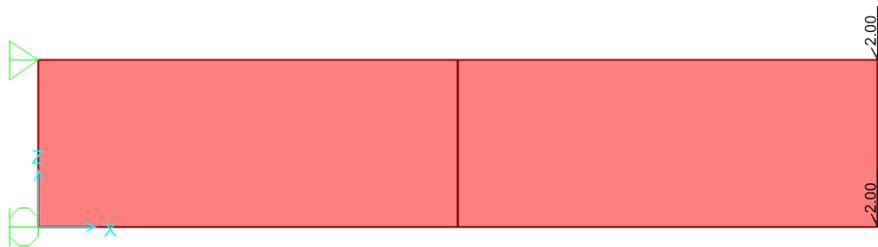


Figura 47. Modelo de cálculo de elementos de modos incompatibles en SAP2000

Los desplazamientos verticales hallados en cada punto del sistema pueden ser presentados a partir de un gráfico de contornos de igual desplazamiento vertical. De la misma manera podría obtenerse dichos gráficos para los esfuerzos inducidos.

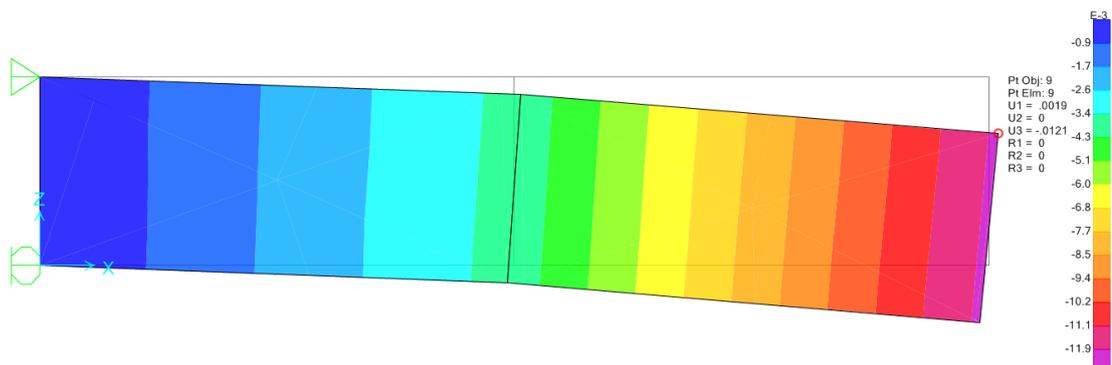


Figura 48. Desplazamientos verticales en elementos incompatibles en SAP2000

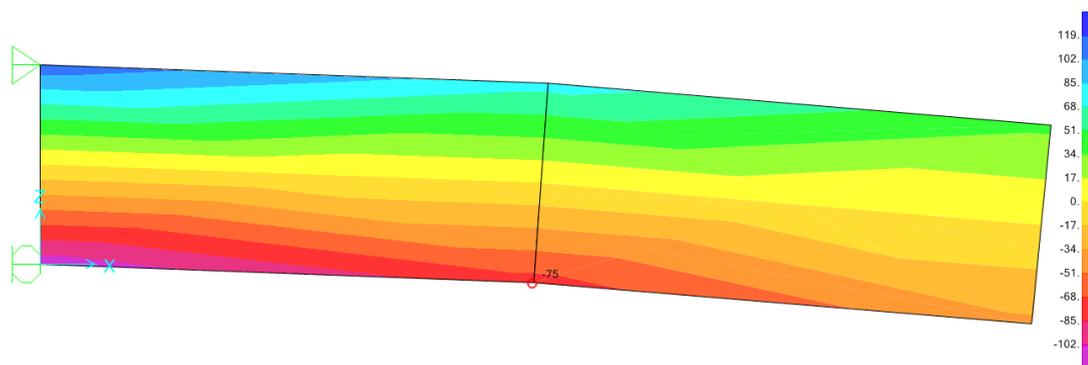


Figura 49. Esfuerzos horizontales en elementos de incompatibles en SAP2000

Podrá notarse que ambos programas entregan una misma solución a nivel de desplazamientos, pero esto no se refleja al verificar el estado de esfuerzos en el programa Phase2, notándose esfuerzos horizontales nulos a comparación de los esfuerzos obtenidos en SAP2000. Por otra parte, los resultados de un cálculo manual se presentan a posterior (ver apéndice B), en los que se presenta resultados idénticos a los entregados por el programa SAP2000.

#### 4.4.9 Comportamiento del elemento de cuatro nodos con modos incompatibles

La evaluación del comportamiento del elemento finito bidimensional de 4 nodos con modos incompatibles, se centra en la evaluación convergente que este posee, y para ello, se han preparado los siguientes gráficos que muestran los resultados de desplazamientos y esfuerzos en función al incremento de grados de libertad de la viga en voladizo presentada en el ejemplo del apartado 4.4.7.

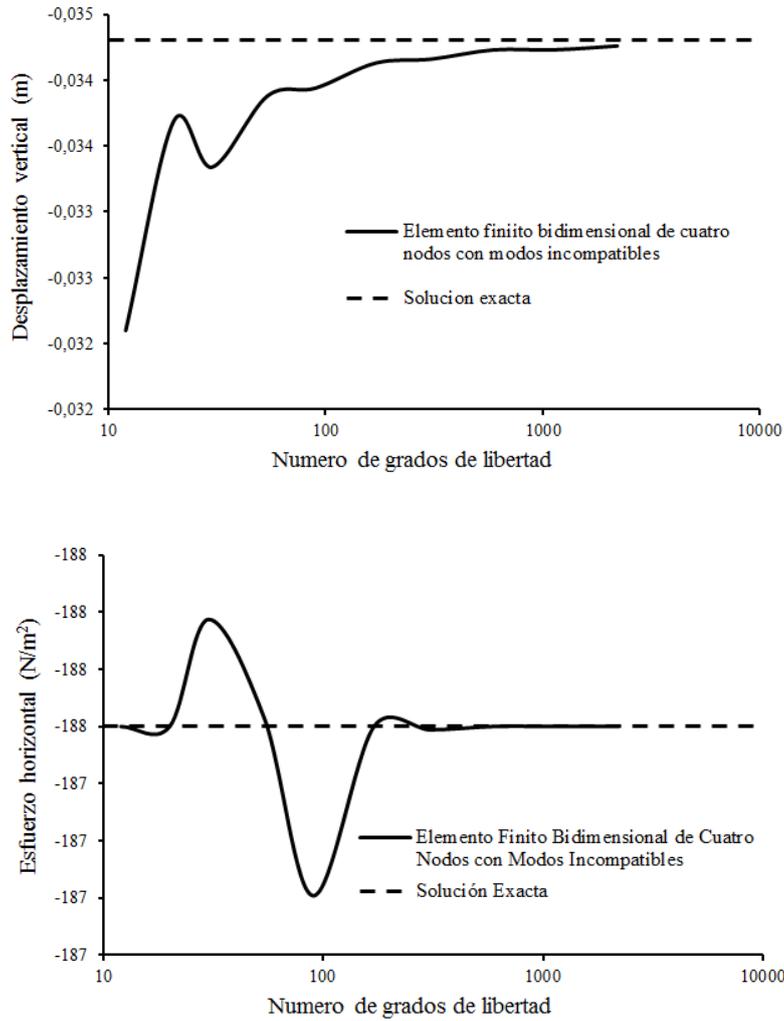


Figura 50. Comportamiento del elemento finito de modos incompatibles

Los gráficos anteriores demuestran que 12 grados de libertad, son suficientes para obtener resultados que puedan ser considerados aceptables a nivel ingenieril. Por otra parte, podrá notarse también que este elemento converge con gran rapidez en el estado de esfuerzos, lo que califica al elemento finito de cuatro nodos con modos incompatibles, como altamente eficiente para condiciones tales como la de predominancia flexional.

Para finalizar este apartado, podrá notarse en el gráfico de esfuerzos que se generan unos resaltos en un rango mínimo de variación, lo cual expresa la variación de condiciones de contorno conforme al incremento de elementos.

#### 4.5 Aplicación del método de elementos finitos a túneles

La presente aplicación del Método de Elementos finitos, está basada en el análisis del túnel 04 del proyecto a nivel de factibilidad “Mejoramiento y ampliación de la frontera agrícola optimizando los recursos hídricos de la sub cuenca del rio Arma Condesuyos Arequipa”, el cual considera obras de captación y conducción tales como canales y 08 Túneles de conducción, con los que se pretende transmitir desde la fuente natural, hasta los campos de cultivo, una cantidad necesaria de agua como recurso hídrico.

El Recurso por excelencia es el agua, y por ello, en la actualidad muchas localidades del mundo centran su visión en la canalización eficiente del mismo, por otra parte, la provincia de Condesuyos mostrada en la Figura 51, presenta altos índices de pobreza y es por ello que los entes encargados de velar por el bienestar de sus pobladores, pretenden que a través del proyecto mencionado se pueda mejorar la calidad de vida de los involucrados, a partir de impulsar la agricultura como medio fundamental de desarrollo.

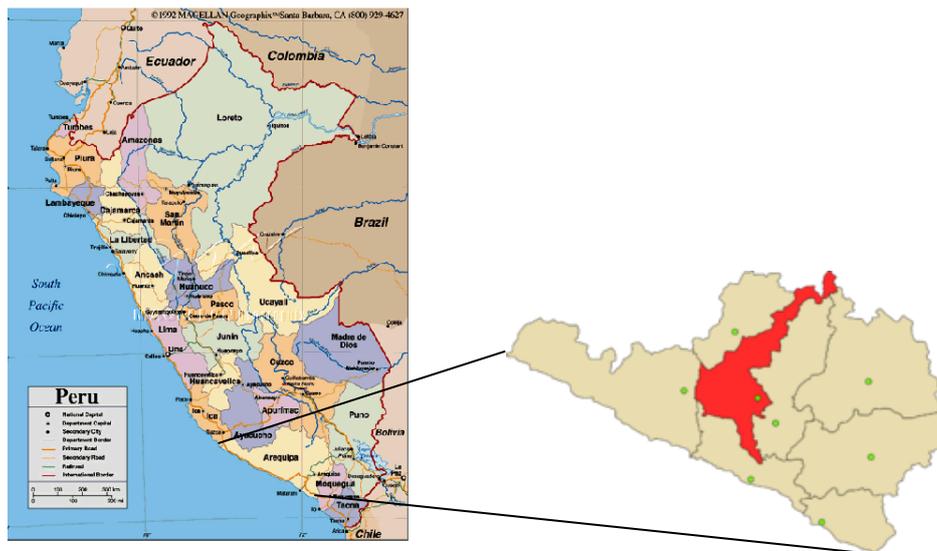


Figura 51. Ubicación provincial del proyecto

### 4.5.1 Topografía

El Túnel 04 se ubica en la margen izquierda del río Arma, está emplazado en el lugar denominado cerro Sune, en la que el portal de entrada se encuentra en la progresiva 22+240 con cota de 4035,344 m.s.n.m. siguiendo el trazo de túnel con azimut N161°E para finalizar en el portal de salida en la progresiva 23+280 con cota 4034,304 m.s.n.m. tal y como se presenta en la Figura 52.

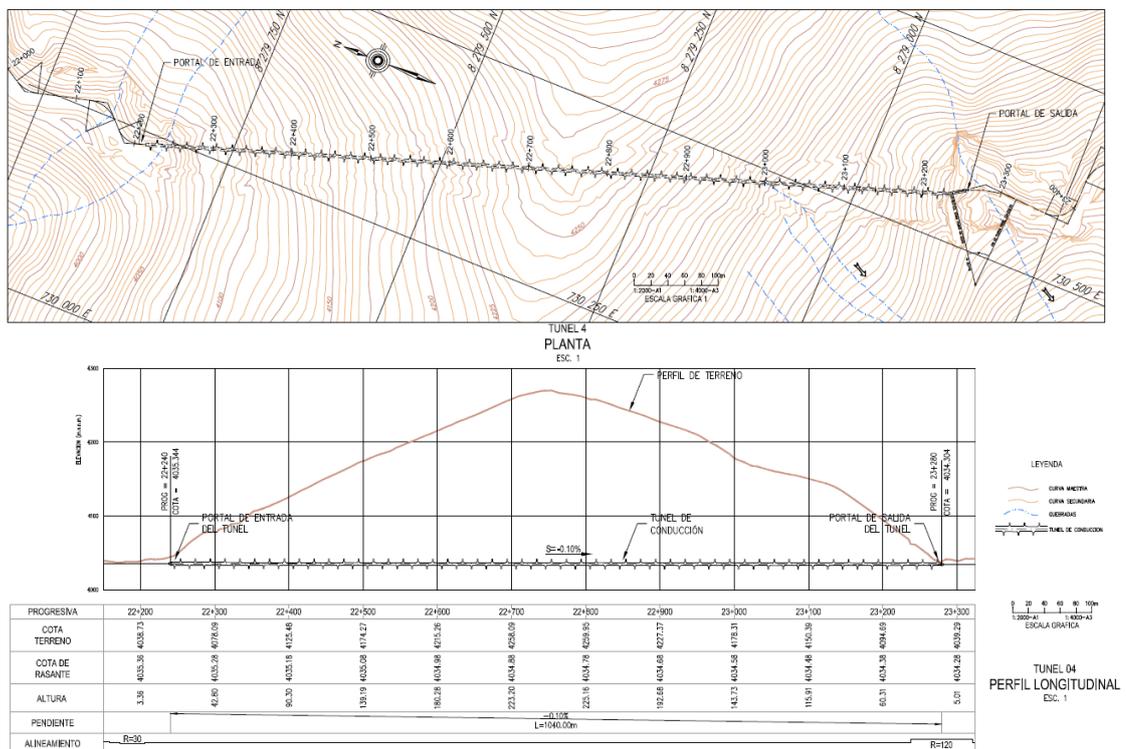


Figura 52. Topografía del túnel 04

### 4.5.2 Geología

El lugar en el que se realizara la excavación del túnel 04, está caracterizado a nivel de Geomorfología, por un relieve característico propio de las zonas de la cordillera andina, modelado por la influencia decisiva de los procesos volcánicos y tectónicos, además de los factores climáticos e hidrológicos, con los que se lograron valles y ríos de cursos sinuosos.

En la Figura 53 se evidencia el relieve redondeado que presenta la superficie de lugar en el que se realizara la excavación, además de presentarse el portal de entrada del túnel 04.



*Figura 53.* Relieve superficial y portal de entrada del túnel 04

A nivel lito-estratigráfico se tiene la presencia de la Formación Sencca (Ts-se) compuesta por Tobas Riolíticas cuyo color predominante es el gris, la misma que suprayece discordantemente a la Intrusión ígnea denominada Súper unidad Tiabaya (Ks-ti/gd), compuesta esencialmente por Granodioritas y Monzonitas que predominan como material de excavación del Túnel 04, tal y como se muestran en el portal de entrada de la Figura 53, que evidencia un afrontamiento no concluido en presencia de material de derrumbe. Es preciso mencionar la presencia de Depósitos deluviales (Q-dl) en la parte superficial cercana al portal de entrada, mostrándose en las siguientes figuras.

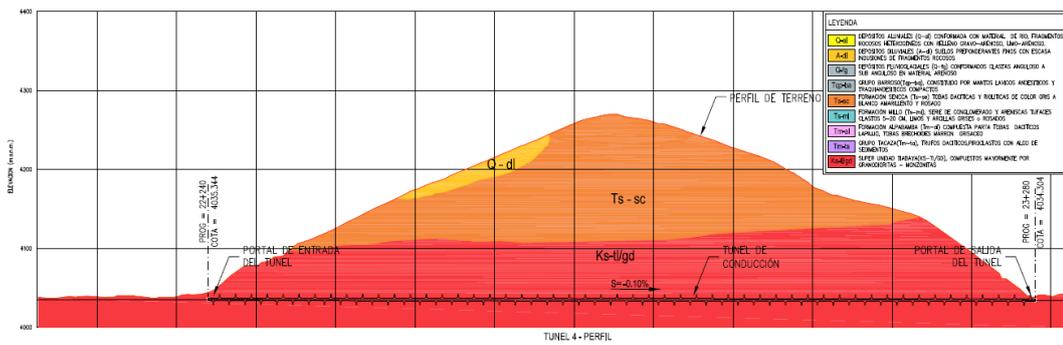
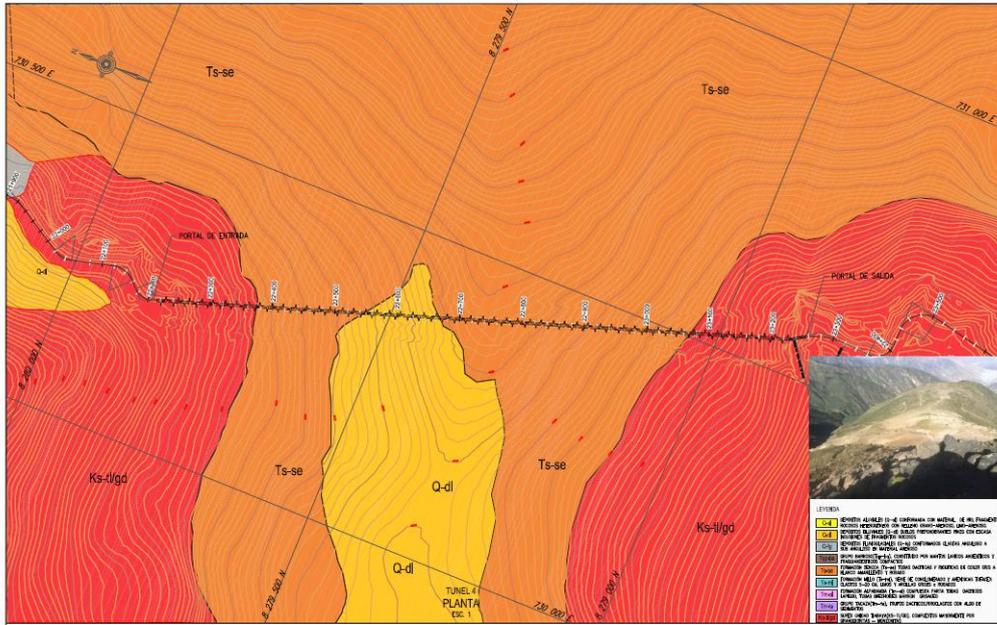


Figura 54. Geología del túnel 04

### 4.5.3 Geotecnia

La Geotecnia es el medio de estimación de las propiedades mecánicas de las unidades geológicas identificadas, y para ello, es necesario ensayar in situ o en laboratorio algunas muestras de los materiales que conforman el macizo rocoso. El proyecto del túnel 04 considera la realización de perforaciones con diamantina en el portal de entrada y portal de Salida, con las que se recuperaron núcleos de roca intacta que serán preparadas para ensayos en laboratorio.

#### 4.5.3.1 Resistencia a la compresión uniaxial de la roca intacta

La resistencia a la compresión inconfiada o uniaxial de la roca intacta, es uno de los medios de estimación de las características de resistencia y deformación del macizo rocoso, por ello, es imprescindible realizar ensayos de laboratorio, utilizando por ejemplo la norma ASTM D 2938, que presenta ciertos estándares para ensayar una muestra cilíndrica obtenida a partir de un fragmento de roca, que será sometido a una carga axial incremental, hasta obtener una carga pico (Resistencia a la Compresión Uniaxial) y una carga de falla (Carga de Rotura).

A continuación se presenta los resultados del ensayo realizado para una de las muestras, denominada M07-T4 de Granodiorita, de la que se extrajo un testigo de roca, con los datos siguientes:

**Tabla 5**

*Resultados del ensayo UCS*

Muestra	Diametro (cm)	Altura (cm)	Carga de rotura (KN)	Resistencia a la compresion uniaxial (Kg/cm <sup>2</sup> )	Resistencia a la compresion uniaxial (MPa)
M07-T4	4,40	8,93	122,1	821	80,4



Figura 55. Testigo de ensayo de compresión uniaxial

#### 4.5.3.2 Propiedades elásticas de la roca intacta

Existen diversos programas que evalúan el estado tensional de un túnel, y para tener acceso a ellos, es necesario contar con algunos parámetros de ingreso, tales como, el módulo de elasticidad y módulo de Poisson del macizo rocoso. Es claro que el módulo de Elasticidad de la roca intacta, no podría ser representativo del macizo rocoso, por el hecho de que este último se encuentra influenciado por discontinuidades, fallas, etc.

A continuación se presenta los resultados del ensayo realizado para una de las muestras, denominada M07-T4 de Granodiorita:

**Tabla 6**

*Resultados del ensayo constantes elásticas*

Muestra	Diametro (cm)	Altura (cm)	Resistencia a la compresion uniaxial (MPa)	Módulo de Young "E" (GPa)	Relación de Poisson
M07-T4	4,39	9,02	91,6	25,08	0,25

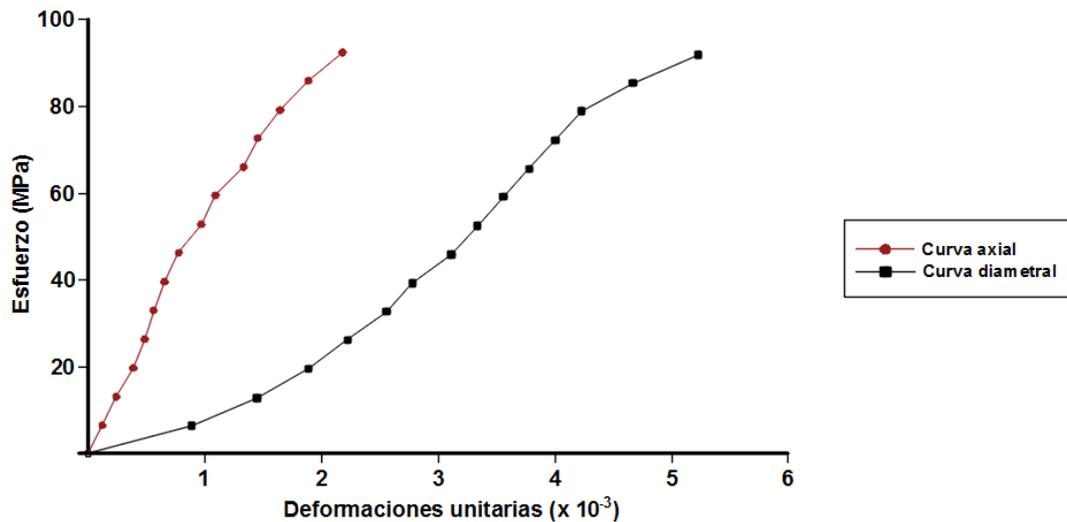


Figura 56. Curva de comportamiento esfuerzo-deformación

#### **4.5.4 Geomecánica**

La Geomecánica es la rama encargada del estudio del comportamiento de suelos y rocas ante diversas sollicitaciones, y por ello es posible considerarla como aquella que engloba a la mecánica de suelos y mecánica de rocas.

La complejidad de las excavaciones realizadas, sobre un medio en equilibrio, es usualmente complicada y requiere de la evaluación de dos fenómenos particulares, estos son: la influencia de las discontinuidades estructurales y el estado tensional generado. Es claro que esta complejidad juega un rol importante a la hora de decidir sobre el diseño de una excavación, por ello, se han desarrollado innumerables criterios basados en la investigación del comportamiento de las distintas excavaciones que se han generado con el paso del tiempo, estos criterios son las llamadas “Clasificaciones Geomecánicas”

##### **4.5.4.1 Clasificación geomecánica RMR**

Las clasificaciones geomecánicas representan un medio de predicción y estimación cuantitativa del comportamiento y solución de las excavaciones subterráneas, debido a ello es posible otorgar ciertas propiedades a un macizo rocoso.

La clasificación RMR (Rock Mass Rating) fue creada por Bieniawski en 1973 y divide al macizo rocoso en sectores de comportamiento parecido. Esta clasificación requiere de los siguientes parámetros:

- Resistencia a la compresión simple de la roca intacta.
- RQD (Rock Quality Designation).
- Espaciado de las discontinuidades.
- Condición de las discontinuidades.
- Condiciones de agua subterránea.

- Orientación de las discontinuidades.

La Evaluación de estos parámetros proporcionara para cada uno de ellos una puntuación, que será sumada y corregida para otorgar el RMR para cada sector de excavación, a continuación se recopila datos de entrada para el portal de entrada del túnel 04, con el fin de clasificar este sector.

***a. Resistencia a la compresión uniaxial de la roca intacta***

Este Parámetro debe ser obtenido a partir de procedimientos estadísticos, considerando una cierta cantidad de muestras. Como una aproximación grosera y por tratarse de un proyecto a nivel de factibilidad se considera en este caso la resistencia obtenida a partir de la muestra M07-T4.

$$\sigma_{ci} = 80,4 \text{ MPa}$$

La evaluación de este parámetro puede realizarse a partir de la siguiente tabla:

**Tabla 7**

*Valuación de la resistencia de la roca intacta*

<b>Descripción cualitativa</b>	<b>Resistencia a la compresión Uniaxial (MPa)</b>	<b>Puntuación</b>
Extremadamente Fuerte	> 250	15
Muy Fuerte	100 – 250	12
Fuerte	50 – 100	7
Medianamente Fuerte	25 – 50	4
Débil	5 – 25	2
Muy Débil	1 – 5	1
Extremadamente Débil	< 1	0

Fuente: Singh & Goel, 2011, pág. 46.

De acuerdo a la anterior tabla y evaluando la resistencia a la compresión uniaxial de 80,4 MPa, se describe a la roca intacta como “fuerte” y obteniendo una puntuación de 7.

**b. RQD (Rock Quality Designation)**

El índice de la calidad de la Roca fue introducida por Deere en 1964, y en un principio fue usado con fines de clasificación, obteniéndose el refuerzo requerido para las excavaciones de la época.

Este índice puede ser definido como el porcentaje de trozos de roca intacta de longitud superior a 10 cm que fueron recuperados a partir de una longitud de sondeo, y que puede ser visto también a partir de la siguiente ecuación:

$$RQD (\%) = \frac{\sum \text{Trozos con longitud} > 10 \text{ cm}}{\text{Longitud total de Barreno}} \dots\dots\dots \text{Ecuación (218)}$$

El índice de calidad de la roca obtenido es:

$$RQD = 45\%$$

La evaluación de este parámetro puede realizarse a partir de la siguiente tabla:

**Tabla 8**  
*Valuación RQD*

<b>Descripción cualitativa</b>	<b>RQD (%)</b>	<b>Puntuación</b>
Excelente	90 – 100	20
Buena	75 – 90	17
Regular	50 – 75	13
Pobre	25 – 50	8
Muy Pobre	< 25	3

Fuente: Singh & Goel, 2011, pág. 46.

De acuerdo a la anterior tabla y evaluando el RQD de 45%, se describe a la roca intacta como de calidad Pobre y obteniendo una puntuación de 8.

### *c. Espaciado de las discontinuidades*

El espaciado de las discontinuidades hace referencia a la distancia perpendicular entre fallas, diaclasas, planos de estratificación, etc. El espaciado juega un rol importante, debido a que es una indicación de la resistencia que puede tener un macizo rocoso, y es claro que un macizo rocoso en presencia de un menor espaciado, poseerá una reducción de resistencia.

El espaciado obtenido oscila con valores 0.1 a 0.14 m por lo que se evaluara con la siguiente tabla:

**Tabla 9**

*Valuación del espaciado de discontinuidades*

<b>Descripción</b>	<b>Espaciamento (m)</b>	<b>Puntuación</b>
Muy amplio	> 2	20
Amplio	0,6 – 2	15
Moderado	0,2 – 0,6	10
Cerrado	0,06 – 0,2	8
Muy cerrado	< 0,06	5

Fuente: Singh & Goel, 2011, pág. 46.

De acuerdo a la anterior tabla, el espaciado es calificado como Cerrado y posee una puntuación de 8.

### *d. Condición de las discontinuidades*

Cuando se habla de la condición de las discontinuidades, se hace referencia a la descripción de características, que poseen las discontinuidades.

La evaluación de la condición de las discontinuidades, requiere de los siguientes parámetros:

- Longitud de las Discontinuidades (Persistencia).  
La longitud de las discontinuidades oscila en el rango de 13-16 m.
- Abertura.

Las aberturas de discontinuidades oscilan en el rango de 3-4 mm

- Rugosidad de la superficie de las discontinuidades.

Las categorías de Rugosidad son: Muy Rugoso, Rugoso, Ligeramente Rugoso, Suave, Espejo de Falla. Otorgándose la categoría de Ligeramente Rugoso.

- Relleno.

El relleno existente es suave y con espesor promedio de 4mm.

- Alteración.

Se presencia Meteorización Moderada.

La evaluación de los anteriores parámetros es obtenida a partir de la siguiente tabla:

**Tabla 10**

*Valuación de la condición de discontinuidades*

Parametro	Puntuación				
	<1m	1-3m	3-10m	10-20m	>20m
Longitud de las Discontinuidades	6	4	2	1	0
Abertura	Ninguna 6	<0,1mm 5	0,1-1,0mm 4	1-5mm 1	>5mm 0
Rugosidad	Muy Rugoso 6	Rugoso 5	Ligeramente Rugoso 3	Suave 1	Espejo de Falla 0
Relleno	Ninguno 6	<5mm Duro 4	>5mm Duro 2	<5mm Suave 2	>5mm Suave 0
Alteración	Inalterado 6	Ligeramente Alterado 5	Moderadamente Alterada 3	Altamente Alterada 1	Descompuesta 0

Fuente: Singh & Goel, 2011, pág. 47.

La puntuación para la longitud de discontinuidades es 1, para la abertura es 1, para la rugosidad es 3, para el relleno la puntuación es 2, finalmente para la alteración se tiene 3. La puntuación total para la condición de las discontinuidades es la suma de los valores hallados y es igual a 10.

#### ***e. Condición de agua subterránea***

Es preciso estimar las condiciones de agua en una excavación, con el fin de medir la influencia que este agente tendrá. Las mediciones deberán realizarse en litros

por min por cada 10m de excavación, además de observar la presión de agua en discontinuidades y la relación que este último tendrá con el esfuerzo principal máximo. La siguiente tabla se muestra los parámetros de evaluación.

**Tabla 11**

*Valuación de la condición de agua subterránea.*

Infiltracion para 10 m de longitud de Tunnel (L/min)	Ninguno	<10	10-25	25-125	>125
Relacion de presion de agua en discontinuidadesal esfuerzo principal mayor	0	0-0,1	0,1-0,2	0,2-0,5	>0,5
Descripcion General	Seco	Humedo	Mojado	Goteo	Flujo de Agua
<b>Puntuación</b>	15	10	7	4	0

Fuente: Singh & Goel, 2011, pág. 48.

Para el proyecto a nivel de factibilidad del túnel 04, no pudo realizarse la investigación de los parámetros requeridos de la anterior tabla, es claro que esta investigación deberá realizarse en la etapa de expediente técnico, por ello, se otorgara la condición “Mojado”, esto en base a las observaciones y a la experiencia de los encargados del proyecto, teniéndose como puntuación 7.

#### *f. RMR básico*

Es posible obtener un parámetro RMR básico a partir de la suma de puntuaciones obtenidas y mostradas en el siguiente cuadro resumen:

**Tabla 12**

*RMR básico*

<b>Parametro de Clasificación</b>	<b>Puntuación</b>
Resistencia a la Compresion Simple de la Roca.	7
RQD (Rock Quality Designation).	8
Espaciado de las Discontinuidades.	8
Condicion de las Discontinuidades.	10
Condicion de Agua Subterranea.	7
<b>RMR básico</b>	<b>40</b>

El RMR básico obtenido, deberá ser corregido por la dirección que presentan las discontinuidades, tal como será desarrollado en el siguiente punto.

**g. Orientación de las discontinuidades**

Es muy importante evaluar la orientación predominante que poseen las discontinuidades, debido a que podría ser fuente de mecanismos desfavorables en el proceso de excavación, tales como la caída de trozos inestables de roca. A continuación se presenta la recopilación de datos geológicos para el portal de entrada del túnel 04, estos datos comprenden, al buzamiento y dirección de las discontinuidades representativas del medio.

**Tabla 13**

*Buzamiento y dirección de las discontinuidades*

<i>Buzamiento</i>	<i>Dirección de Buzamiento</i>	<i>Buzamiento</i>	<i>Dirección de Buzamiento</i>	<i>Buzamiento</i>	<i>Dirección de Buzamiento</i>
40	10	24	321	80	85
38	12	60	160	82	84
35	15	60	165	81	82
45	14	58	162	80	85
41	12	55	165	83	84
42	10	60	160	81	86
53	9	50	280	80	85
40	8	55	282	82	82
41	12	52	280	83	81
42	10	51	281	85	83
40	11	53	280	80	85
40	12	54	283	82	84
41	15	50	320	45	135
40	12	52	312	51	132
45	13	51	320	46	135
42	15	50	325	48	134
25	320	52	324	47	132
23	325	53	323	49	130

Es posible plasmar los datos anteriores, en una red estereográfica polar, esto con el fin de encontrar curvas de concentración de polos, que indiquen la orientación de las discontinuidades predominantes en el área de estudio:

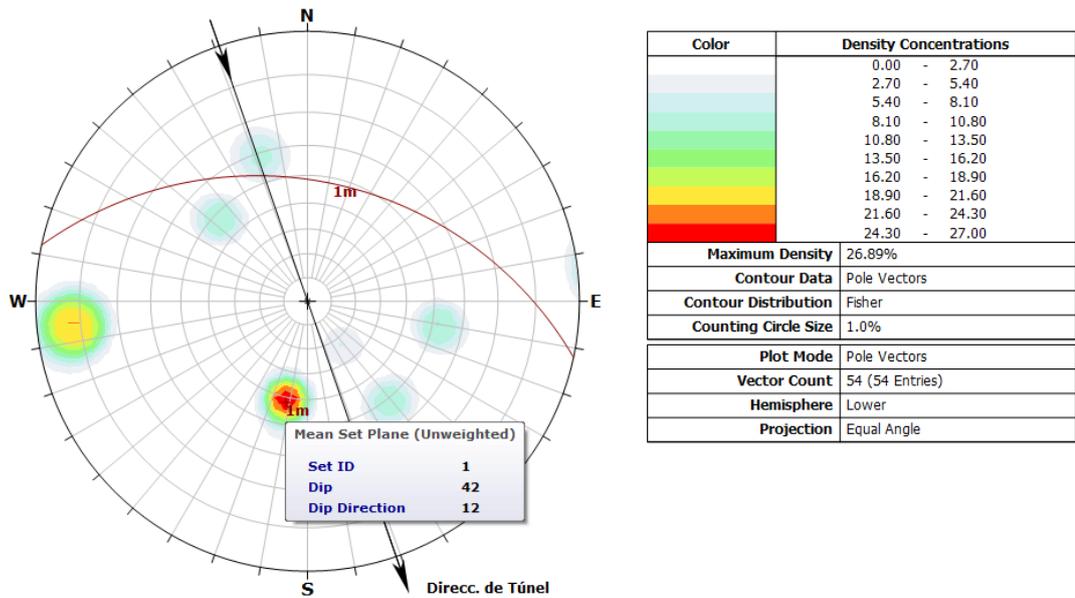


Figura 57. Red estereográfica polar para el portal de entrada

La anterior figura presenta la mayor concentración de polos con color Rojo, y puede rescatarse que el sistema principal de discontinuidades quedó orientado de manera perpendicular al eje del túnel, y en contra a la dirección de excavación, con buzamiento de  $42^\circ$  y una dirección de buzamiento de  $12^\circ$ . La siguiente tabla muestra los parámetros de valuación, para las condiciones antes descritas:

**Tabla 14**

*Descripción del rumbo y buzamiento del túnel*

Rumbo Perpendicular al eje del Túnel				Rumbo paralelo al eje del túnel		Buzamiento de $0^\circ - 20^\circ$ independiente del rumbo
Penetración en la dirección del buzamiento		Penetración contra la dirección del buzamiento		Buzamiento $45^\circ - 90^\circ$	Buzamiento $20^\circ - 45^\circ$	
Buzamiento $45^\circ - 90^\circ$	Buzamiento $20^\circ - 45^\circ$	Buzamiento $45^\circ - 90^\circ$	Buzamiento $20^\circ - 45^\circ$	Buzamiento $45^\circ - 90^\circ$	Buzamiento $20^\circ - 45^\circ$	
Muy Favorable	Favorable	Regular	Desfavorable	Muy Desfavorable	Regular	Desfavorable

Fuente: Singh & Goel, 2011, pág. 50.

**Tabla 15***Valuación de la orientación de las discontinuidades*

<b>Puntuacion de orientacion de las discontinuidades para:</b>	<b>Muy favorable</b>	<b>Favorable</b>	<b>Regular</b>	<b>Desfavorable</b>	<b>Muy desfavorable</b>
Tuneles	0	-2	-5	-10	-12
Cimentaciones	0	-2	-7	-15	-25
Taludes	0	-5	-25	-50	-60

Fuente: Singh &amp; Goel, 2011, pág. 50.

De acuerdo a las anteriores tablas, y verificando las condiciones descritas, se tiene orientación Desfavorable, con puntuación de corrección -10.

***h. RMR (Rock Mass Rating)***

Una vez que fueron determinados los parámetros necesarios, se procederá a determinar el RMR para el macizo rocoso de análisis, este será el que se obtiene a partir de corregir el valor del RMR básico a través de la valuación otorgada a la orientación de las discontinuidades, tal como lo que se presenta a continuación.

**Tabla 16***RMR evaluado*

<b>Parametro de Clasificación</b>	<b>Puntuación</b>
RMR básico	40
Orientacion de las Discontinuidades.	-10
<b>RMR</b>	<b>30</b>

Entonces el valor RMR del portal de entrada del Túnel 04 es de 30, valor que puede ser categorizado, y utilizado para poder determinar el sostenimiento y el tiempo en el que la excavación, podría permanecer sin sostenimiento, además, podría obtenerse rangos de cohesión, Angulo de fricción, etc. Las siguientes tablas presentan la categorización y los datos predictivos para los distintos rangos RMR.

**Tabla 17***Datos predictivos del RMR calculado*

<b>Clase de RMR</b>	<b>Excavacion</b>	<b>Bulones de roca (20mm de diametro, relleno de grout)</b>	<b>Shotcrete (Concreto Lanzado)</b>	<b>Cerchas</b>
Roca muy buena RMR: 81 - 100	Seccion Completa 3m de avance.	Generalmente no requiere soporte excepto bulonaje selectivo.		
Roca buena. RMR: 61 - 80	Seccion Completa 1-1.5m de avance. Soporte completo a 20 m del frente de excavación.	Bulonaje localizado de 3m de long. en la clave, espaciados a 2.5m con malla metalica ocasional.	50 mm en la clave y donde sea requerido.	Ninguna.
Roca regular. RMR: 41 - 60	Frente superior y banco. 1.5-3 de avance en frente superior. Empezar con soporte despues de cada voladura.	Bulonaje sistematico de 4m de long. Espaciados de 1-2.5m en la clave y hastiales con malla metalica en la clave.	50-100mm en la clave y 30mm en hastiales.	Ninguna.
Roca mala. RMR: 21 - 40	Frente superior y banco. 1-1.5m de avance en frente superior. Instalar soporte concurrente con la excavacion, 10m desde el frente.	Bulonaje sistematico de 4-5m de long. espaciados de 1-1.5m en la clave y hastiales con malla metalica.	100-150mm en la clave y 100mm en hastiales.	Ligeras a medianas espaciadas 1.5m donde se requiera.
Roca muy mala. RMR: < 20	Galeria multiple 0.5-1.5m de avance en el frente superior. Instalar soporte concurrente con la excavacion. Shotcrete temprano es posible despues de la voladura.	Bulonaje sistematico de 5-6m de long. Espaciados de 1-1.5m en la clave y hastiales con malla metalica. Bulones invertidos.	150-200mm en la clave, 150mm en hastiales y 50mm en el frente de excavación.	Medianas a fuertes espaciadas a 0.75m con revestimiento de acero y matraz si se requiere. Cierre invertido.

Fuente: Hoek, 2014, pág. 11

**Tabla 18**

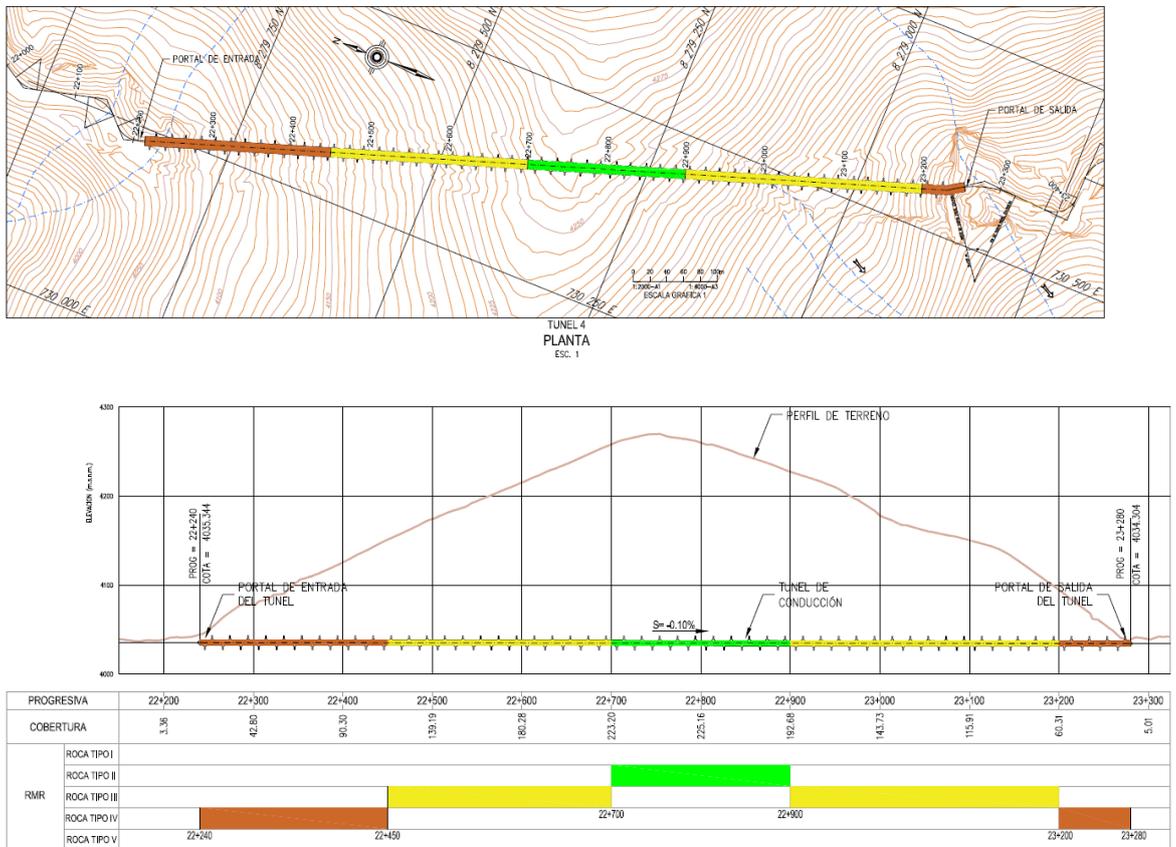
*Características del macizo rocoso según el RMR calculado*

Parametros/Propiedades del Macizo Rocosó	RMR				
	100 – 81 TIPO I	80 – 61 TIPO II	60 – 41 TIPO III	40 – 21 TIPO IV	<20 TIPO V
Tiempo promedio de sostén.	20 Años para 15m.	1 Año para 10m.	1 semana para 5m.	10 horas para 2.5m	30 min para 1m
Cohesión del macizo rocoso (MPa)	>0,4	0,3-0,4	0,2-0,3	0,1-0,2	<0,1
Angulo de fricción del macizo rocoso	<45°	35-45°	25-35°	15-25°	<15°

Fuente: Singh & Goel, 2011, pág. 51

El sector del portal de entrada posee un RMR de 30, lo cual lo califica como un sector de roca mala.

En los siguientes gráficos se sectoriza la zona de estudio conforme a comportamientos similares, en base al tipo de roca obtenido a través de la clasificación RMR.



**Figura 58.** Sectorización RMR del túnel 04

#### 4.5.4.2 Módulo de deformación del macizo rocoso

El módulo de deformación del Macizo Rocosos, es uno de los parámetros más importantes para el cálculo numérico de deformaciones y tensiones, por ello Bieniaswki, realizo una investigación a través de la medición de distintos módulos de deformación para distintos macizos rocosos, logrando utilizar su clasificación para poder determinar dicho parámetro, encontrando la siguiente relación:

$$E_{rm} (GPa) = 2RMR - 100 \quad (\text{Aplicable para } RMR > 50) \quad \text{Ecuación (219)}$$

Serafim y Pereira (1983) lograron la siguiente relación:

$$E_{rm} (GPa) = 10^{(RMR-10)/40} \quad (\text{Aplicable para } RMR < 50) \quad \text{Ecuación (220)}$$

En la actualidad existen numerosas investigaciones acerca del módulo de deformación del macizo rocoso, algunas con más éxito que otras, pero en esta investigación se hará uso de las expresiones anteriores, debido a que se pretende seguir un procedimiento de cálculo claro y sencillo.

En lo siguiente se calcula el módulo de deformación de la porción de macizo rocoso más desfavorable, con RMR igual a 30, para ello se hará uso de la ecuación de Serafim y Pereira:

$$E_{rm} (GPa) = 10^{(RMR-10)/40} \quad E_{rm} = 3.162 \text{ GPa} \quad \text{..... Ecuación (221)}$$

#### 4.5.4.3 Criterio de Rotura – Hoek & Brown

Los criterios de rotura, fueron creados con la finalidad de obtener la resistencia que poseen ciertos materiales. Estos criterios evalúan un estado tensional y predicen si dicho estado, conducirá a algún tipo de falla del material.

El Criterio de Mohr-Coulomb, es tal vez uno de los criterios que dio inicio a la evaluación de ruptura de los materiales, pero es preciso mencionar que dicho criterio posee algunos inconvenientes a la hora de evaluar la ruptura de los macizos rocosos, por ello se hará uso del criterio de mayor difusión dentro del ámbito de la mecánica de rocas, este es el propuesto por Hoek y Brown.

El criterio de Hoek y Brown, es un criterio empírico basado en diversos estudios de roca intacta en laboratorio y de estudios del comportamiento de distintos macizos rocosos. Este criterio fue modificándose desde 1980 hasta la actualidad, para ajustarse a toda la amplia gama de aplicaciones, lográndose la siguiente expresión:

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 + \sigma_{ci} \left( m_b \frac{\sigma'_3}{\sigma_{ci}} + s \right)^a \dots\dots\dots \text{Ecuación (222)}$$

Dónde:

$\sigma'_1, \sigma'_3$  Son los esfuerzos principales efectivos mayor y menor en el momento de rotura.

$\sigma_{ci}$  Es la resistencia a la compresión uniaxial de la roca intacta.

$m_b$  Es una constante para el macizo rocoso.

$s, a$  Son constantes que dependen de las características del macizo rocoso.

La constante  $m_b$  es un valor reducido de la constante  $m_i$  de la roca intacta, que define el carácter friccionante que posee la roca y que puede ser calculada a partir de la siguiente tabla:

**Tabla 19**

Valores de la constante  $m_i$  para distintos tipos de roca

Tipo de Roca	Clase	Grupo	Textura				
			Gruesa	Media	Fina	Muy Fina	
Sedimentarias	Clasticas	Conglomerados*	(31± 3)	Areniscas	Limolita		
			Brechas	17± 4	Grauvaca	7± 2	Arcillolita
			(19± 5)		(18± 3)	4± 2	
	No Clasticas	Carbonatos	Caliza Cristalina	Caliza Esparitica	Caliza Micritica	Dolomitas	
		(12± 3)	(10± 2)	(9± 2)	(9± 3)		
	Organicas	Evaporitas	Yeso	Anhidrita			
		8± 2	12± 2				
					Carbon		
					7± 2		
Metamorficas	No Foliadas	Marmol		Corneas			
			9± 3	(19± 4)	Cuarcitas		
	Levemente Foliadas	Migmatita		Metareniscas			
			(29± 3)	(19± 3)	20± 3		
	Foliadas**	Gneiss		Anfibolitas			
			28± 5	26± 6			
Claras	Granodiorita		Esquistos	Filitas	Pizarras		
		32± 3	12± 3	(7± 3)	7± 4		
		(29± 3)	25± 5				
Igneas	Plutonicas	Gabbros		Dolerita			
			27± 3	(16± 5)			
	Oscuras	Norita					
			20± 5				
	Hipoabisal	Porfidios			Diabasa	Peridotita	
			(20± 5)		(15± 5)	(25± 5)	
Volcanicas	Lava	Aglomerado		Riolita			
				(25± 5)	Dacita		
				25± 5	(25± 3)	Obsidiana	
			Andesita	Basalto	(19± 3)		
			25± 5	(25± 5)			
Piroclasticas	Brechas	Tobas					
			(19± 3)	(19± 5)	(13± 5)		

\* Conglomerados y brechas pueden presentar una amplia gama de valores  $m_i$  dependiendo de la naturaleza del material de cementación y el grado de cementación, por lo que pueden variar desde valores similares a la arenisca hasta valores usados para sedimentos de grano fino.

\*\* Estos valores corresponden a especímenes de roca intacta sometidos a una prueba de carga normal al plano de foliación. Los valores  $m_i$  serán significativamente diferentes, si la falla se produce a lo largo de un plano de debilidad.

Fuente: Hoek, 2014, pág. 7

La excavación será realizada en Granodiorita, y presentando valores de

$m_i$  en un rango de  $29 \pm 3$ , por lo que:

$$m_i = 26 - 32 \dots\dots\dots \text{Ecuación (223)}$$

**a. GSI (Geological Strength Index)**

El índice Geológico de Resistencia GSI, fue introducido por Hoek en 1994 y representa un medio de estimación de la influencia que tiene el grado de fracturación y la condición de las discontinuidades, sobre la resistencia que posee el macizo rocoso. La valuación GSI, puede ser obtenida a partir de las observaciones en campo y utilizando el siguiente gráfico:

INDICE GEOLOGICO DE RESISTENCIA  Desde la litología, estructura y condiciones de superficie de las discontinuidades, estimar un valor promedio del <b>GSI</b> . Expresar un rango desde 33 a 37, es mas realista que decir que GSI=35. Note que la tabla no se aplica a las fallas estructuralmente controlables. Cuando se presenten planos de debilidad en una orientacion desfavorable, con respecto al frente de excavacion , estos dominaran el comportamiento de la masa rocosa.  ESTRUCTURA DEL MACIZO ROCOSO	CONDICIÓN DE LAS DISCONTINUIDADES				
	<b>MUY BUENA</b> Superficies rugosas y de cajas frescas (sin señales de intemperización ni de alteración)	<b>BUENA</b> Superficies rugosas, cajas levemente intemperizadas y/o alteradas, con pátinas de óxido de hierro	<b>REGULAR</b> Superficies lisas, cajas moderadamente intemperizadas y/o alteradas	<b>MALA</b> Superficies lisas y cizalladas, cajas intemperizadas y/o alteradas, con rellenos de fragmentos granulares y/o arcillosos firmes	<b>MUY MALA</b> Superficies lisas y cizalladas, cajas muy intemperizadas y/o alteradas, con rellenos arcillosos blandos
	EMPEORA LA CONDICIÓN DE LAS DISCONTINUIDADES →				
 <b>FRACTURADO LEVE (INTACT OR MASSIVE)</b> ESPECIMENES DE ROCA INTACTA O ROCA MASIVA IN-SITU CON CON POCOS Y AMPLIOS ESPACIOS DE DISCONTINUIDADES	90			N/A	N/A
 <b>FRACTURADO EN BLOQUES (BLOCKY)</b> MACIZO ROCOSO CONFORMADO POR TROZOS O BLOQUES DE ROCA BIEN TRABADOS, DE FORMA CUBICA Y DEFINIDOS POR TRES SETS DE ESTRUCTURAS, ORTOGONALES ENTRE SI.	80	70			
 <b>FUERTEMENTE FRACTURADO EN BLOQUES (VERY BLOCKY)</b> MACIZO ROCOSO ALGO PERTURBADO, CONFORMADO POR TROZOS O BLOQUES DE ROCA TRABADOS, DE VARIAS CARAS, ANGULOSOS Y DEFINIDOS POR CUATRO O MAS SETS DE ESTRUCTURAS.		60	50		
 <b>FRACTURADO Y PERTURBADO (BLOCKY / DISTURBED)</b> MACIZO ROCOSO PLEGADO Y/O AFECTADO POR FALLAS, CONFORMADO POR TROZOS O BLOQUES DE ROCA DE VARIAS CARAS, ANGULOSOS Y DEFINIDOS POR LA INTERSECCION DE NUMEROSOS SETS DE ESTRUCTURAS.			40	30	
 <b>DESINTEGRADO (DESINTEGRATED)</b> MACIZO ROCOSO MUY FRACTURADO Y QUEBRADO, CONFORMADO POR UN CONJUNTO POBRAMENTE TRABADO DE BLOQUES Y TROZOS DE ROCA, ANGULOSOS Y TAMBIEN REDONDEADOS				20	
 <b>LAMINADO (LAMINATED/SHEARED)</b> AUSENCIA DE BLOQUES DEBIDO AL ESTRECHO ESPACIAMIENTO DE ESQUISTOCIDAD DEBIL O PLANOS DE CORTE	N/A	N/A			10
	← DISMINUYE LA TRABAZON DE LOS BLOQUES DE ROCA				

Figura 59. Estimación del índice geológico de resistencia (GSI)

La siguiente imagen presenta uno de los afloramientos para el túnel 04, este presenta en la zona izquierda de la imagen bloques de roca angulosos, formados por más de cuatro caras, por ello puede calificarse Fuertemente Fracturado y con superficies de discontinuidad de transición lisa a rugosa, por lo que puede ser calificada como lisa considerando el aspecto más desfavorable.



Figura 60. Afloramiento en el túnel 04 del proyecto del río Arma

De acuerdo a las anteriores descripciones y utilizando la tabla correspondiente, la valuación GSI podría ser tomada en un rango de 40 a 45.

$$GSI = 40 - 45 \dots\dots\dots \text{Ecuación (224)}$$

**b. Factor de Alteración “D”**

El factor “D” es un valor que toma en cuenta el efecto del grado de alteración en el que se encuentra un macizo rocoso, ya sea debido a efectos producidos por voladura o debido a una relajación tensional. El factor “D” toma valor nulo cuando se trata de un macizo rocoso inalterado y un valor de 1 cuando se trata de macizos rocosos muy alterados.

**Tabla 20**

*Valores de característicos del factor de alteración D*

Apariencia del Macizo Rocosco	Descripcion del Macizo Rosoco	Valor D sugerido
	<p>Excelente calidad de voladura controlada o excavación con tuneladora, TBM, con resultados de alteracion minima del macizo rocoso confinado circundante an tunel.</p>	D=0.
	<p>Excavacion mecánica o manual en macizos rocos de mala calidad (sin voladuras) con una alteracion minima en el macizo rocoso circundante.</p> <p>Cuando aparezcan problemas de deformación en el piso durante el avance, la alteracion puede ser severa a menos que se coloque una contraboveda temporal, tal como se muestra en la fotografia.</p>	<p>D=0.</p> <p>D=0,5 Sin Contraboveda</p>
	<p>Voladura de muy mala calidad en un túnel en roca competente con daños locales severos, extendiendose 2 o 3m en el macizo rocoso circundante.</p>	D=0,8
	<p>Pequeñas voladuras en taludes de ingenieria civil dan lugar a pequeños daños al macizo rocoso, particularmente si se usan voladuras de contorno como se muestra en el lado izquierdo de la fotografia. Sin embargo la liberacion de tensiones resulta en alguna alteración.</p>	<p>D=0,7 Buena Voladura</p> <p>D=1,0 Mala Voladura</p>
	<p>Los taludes en las grandes minas a tajo abierto sufren alteraciones significativas debido a las grandes voladuras de producción y tambien debido a las relajación de tensiones al retirar el estéril de recubrimiento.</p>	D=1,0 Produccion de Voladura
	<p>En algunas rocas blandas la excavación puede llevarse a cabo mediante el ripado y empuje con tractores de orugas y el grado de afección a los taludes será menor.</p>	D=0,7 Excavación Mecanica.

Fuente: Hoek, 2014, pág. 17

Hoek advierte que el factor “D” solo se aplica a zonas de daño producidas por voladura y que no debería aplicarse para todo el macizo rocoso, tomando como ejemplo la alteración producida en un túnel, en la que la zona de daño, se limita de 1 a 2m de espesor alrededor del túnel, sugiriendo por ello que los modelos numéricos deberían incluir esta condición, considerando la zona circundante a la excavación como un material diferente y más débil.

La excavación del túnel 04 será realizada tomando en cuenta aspectos desfavorables de voladura, lo que conduce a un valor de 08 para el factor de alteración.

$$D = 0,8 \dots\dots\dots \text{Ecuación (225)}$$

Cuando se disponga de la constante  $m_i$ , el factor de alteración  $D$  y el valor del índice geológico de resistencia GSI, podrá calcularse las constantes  $s$ ,  $a$  y  $m_b$  a partir de las siguientes relaciones:

$$m_b = m_i \exp\left(\frac{GSI - 100}{28 - 14D}\right) \dots\dots\dots \text{Ecuación (226)}$$

$$s = \exp\left(\frac{GSI - 100}{9 - 3D}\right) \dots\dots\dots \text{Ecuación (227)}$$

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} e^{-GSI/15} - e^{-20/3} \dots\dots\dots \text{Ecuación (228)}$$

Haciendo uso de las anteriores ecuaciones se encontraron los valores medios de  $s$ ,  $a$  y  $m_b$ , con los que fue posible realizar la curva de falla del material.

$$m_b = 0,97 \quad s = 0,00018 \quad a = 0,51 \dots\dots\dots \text{Ecuación (229)}$$

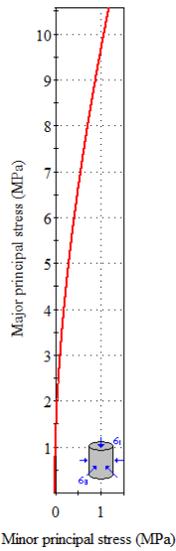


Figura 61. Resistencia pico del macizo rocoso del túnel 04

El anterior grafico fue dibujado para el intervalo correspondiente al esfuerzo de tracción  $\sigma'_t$  hasta un valor de  $\sigma'_{3\max}$ .

El esfuerzo de tracción puede ser obtenido haciendo que  $\sigma'_1 = \sigma'_3 = \sigma'_t$  en la ecuación del criterio de rotura, lográndose obtener:

$$\sigma'_t = -\frac{s \sigma_{ci}}{m_b} \dots \dots \dots \text{Ecuación (230)}$$

Por otra parte, el valor  $\sigma'_{3\max}$  puede obtenerse a partir de la resistencia global del macizo rocoso  $\sigma'_{cm}$ , que viene expresada por:

$$\sigma'_{cm} = \sigma_{ci} \frac{[m_b + 4s - a(m_b - 8s)](m_b / 4 + s)^{a-1}}{2(1+a)(2+a)} \dots \dots \dots \text{Ecuación (231)}$$

Obteniéndose con ello la siguiente expresión del  $\sigma'_{3\max}$ , de aplicación a túneles:

$$\frac{\sigma'_{3\max}}{\sigma'_{cm}} = 0,47 \left( \frac{\sigma'_{cm}}{\gamma H} \right)^{-0.94} \dots \dots \dots \text{Ecuación (232)}$$

Donde  $\gamma$  es el peso específico del macizo rocoso, y  $H$  es la profundidad del túnel desde la superficie, y que en casos en los que el esfuerzo horizontal sea mayor al esfuerzo vertical, tendrá que reemplazarse el término  $\gamma H$  por el valor del esfuerzo horizontal.

#### 4.5.5 Comportamiento post-pico del macizo rocoso

Las características de resistencia descritas en el apartado anterior, corresponden a una resistencia de pico del material, tal y como se muestran en los siguientes gráficos de esfuerzo deformación que caracterizan a la mayoría de rocas.

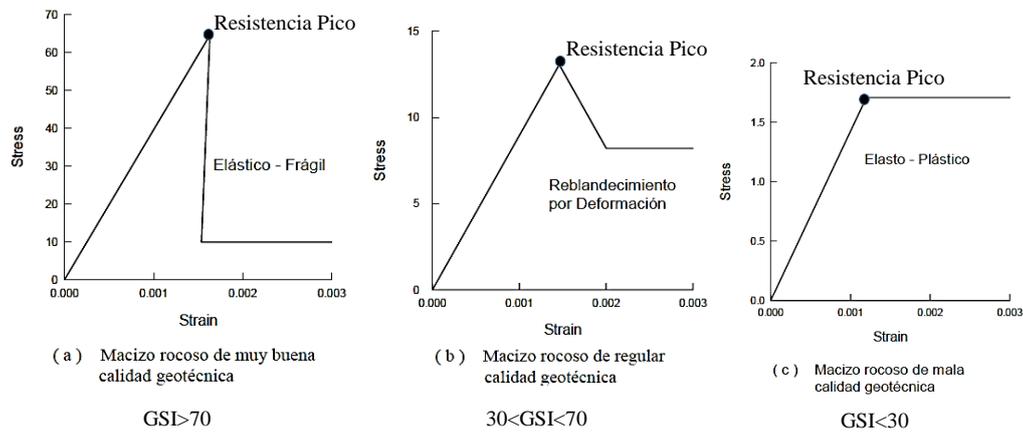


Figura 62. Características post-pico para macizos rocosos típicos

El rango de valores a la izquierda de la resistencia de pico de cada gráfico, representa el Criterio de Rotura expuesto en el anterior apartado, y en la actualidad los modelos numéricos realizados por ordenador, poseen la capacidad de realizar un análisis que describa el comportamiento después de la resistencia pico, estos análisis se sustentan en un enfoque de plasticidad, que toma como punto de partida, los siguientes conceptos:

**4.5.5.1 Plasticidad**

La plasticidad a diferencia de la elasticidad, estudia una relación no única entre esfuerzos y deformaciones, con lo que es posible realizar un estudio más coherente del proceso de deformación a través de los cambios de estado tensional del material.

Un incremento infinitesimal de deformación  $d\varepsilon$  en un estado plástico poseerá dos componentes, una elástica  $d\varepsilon^e$  y una plástica  $d\varepsilon^p$  teniéndose:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \dots\dots\dots \text{Ecuación (233)}$$

Esta ecuación puede ser entendida a partir de que en un proceso de descarga, luego de haber superado la fluencia o resistencia pico en el caso de Rocas, el material presentara deformaciones remanentes, con las que no podrá regresar a su estado original.

**a. Superficie de fluencia**

El concepto de Superficie de Fluencia, es usado para determinar si el material ha alcanzado la fluencia o Resistencia Pico para el caso de rocas.

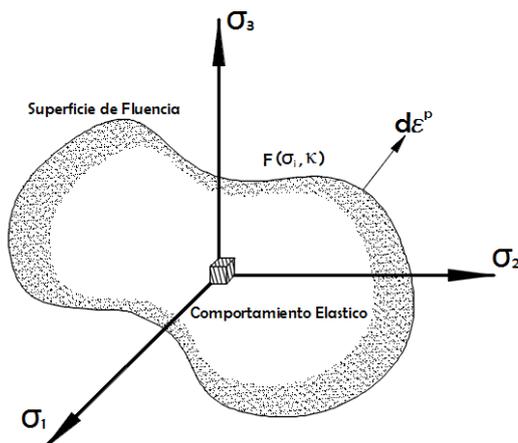


Figura 63. Superficie de fluencia en un espacio “n” dimensional

La anterior Imagen representa a la superficie de fluencia del material en un espacio “n” dimensional, y que puede ser representada a partir de la siguiente ecuación:

$$F(\sigma_i, \kappa) = 0 \dots\dots\dots \text{Ecuación (234)}$$

Donde  $\kappa$  representa un parámetro de “endurecimiento”, que controla el tamaño, forma y posición de la superficie de fluencia, en base al tipo de comportamiento del material, que podría ser rigidizable para el caso de algunos metales, perfectamente plástico o reblandeciente para el caso de algunas rocas en el que la superficie de fluencia se contrae durante el proceso de carga.

La superficie de fluencia representa una ecuación en funciones de tensiones, y para el caso de rocas, puede considerarse el criterio de Hoek y Brown como un criterio de fluencia, que puede ser representado a nivel tridimensional y en base a invariantes, tal y como se muestran a continuación:

$$F = -\frac{I_1}{3} m_b \sigma_c^{(1/a-1)} - s \sigma_c^{1/a} + 2 \sqrt{J_2} \cos(\theta)^{1/a} + m_b \sqrt{J_2} \sigma_c^{(1/a-1)} \left( \cos(\theta) + \frac{\text{sen}(\theta)}{\sqrt{3}} \right) = 0 \quad \text{Ecuación (235)}$$

Dónde:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad J_2 = \frac{1}{2} (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

$$J_3 = S_x S_y S_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - S_x \tau_{yz}^2 - S_y \tau_{xz}^2 - S_z \tau_{xy}^2$$

$$S_x = \sigma_x - \frac{I_1}{3} \quad S_y = \sigma_y - \frac{I_1}{3} \quad S_z = \sigma_z - \frac{I_1}{3} \quad \theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right) \quad \text{Ecuación (236)}$$

Esta ecuación debe ser evaluada a partir de las tensiones inducidas, para obtener las siguientes condiciones:

- Si  $F < 0$ , el estado tensional se encuentra en un régimen Elástico.
- Si  $F = 0$ , el estado tensional se encuentra en un régimen Plástico.
- Si  $F > 0$ , el estado tensional es inadmisibles y ya se incursión en régimen Plástico.

**b. Ley de endurecimiento**

Una ley de endurecimiento debe establecerse para poder definir el tamaño, la forma y posición de la superficie de fluencia, a partir del parámetro  $\kappa$ . Los enfoques más usados, para hallar el parámetro de “endurecimiento”  $\kappa$  son (1) determinar la deformación plástica acumulada y (2) determinar la cantidad de trabajo desarrollado durante la fase de deformación plástica.

Si se trata con el segundo enfoque, el parámetro de endurecimiento puede ser calculado como el siguiente incremento:

$$d\kappa = \sigma d\varepsilon^p \dots\dots\dots \text{Ecuación (237)}$$

O en términos generales se tiene:

$$\kappa = f(\varepsilon^p) \dots\dots\dots \text{Ecuación (238)}$$

**c. Regla de flujo plástico.**

Von Mises propuso la existencia de una función denominada Potencial Plástico  $Q$ , como medio para determinar los incrementos de deformación plástica a partir de un escalar  $d\lambda$  que determine la magnitud de las deformaciones plásticas y un vector  $\partial Q / \partial \sigma$  que determine la dirección de estos, teniéndose:

$$d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \dots\dots\dots \text{Ecuación (239)}$$

Muchos de los criterios de fluencia establecen los incrementos de deformación, en función a la superficie de fluencia, y en este caso se denomina regla de flujo asociativa o plasticidad asociada, teniendo que:

$$F = Q \dots\dots\dots \text{Ecuación (240)}$$

En caso contrario ( $F \neq Q$ ) se denominara regla de flujo No asociativa o plasticidad No asociada.

La función de potencial plástico, para el criterio de Hoek y Brown es:

$$Q = -\frac{I_1}{3} m_{bdil} \sigma_c^{(1/a-1)} - s \sigma_c^{1/a} + 2 \sqrt{J_2} \cos(\theta)^{1/a} + m_{bdil} \sqrt{J_2} \sigma_c^{(1/a-1)} \left( \cos(\theta) + \frac{\text{sen}(\theta)}{\sqrt{3}} \right) = 0 \quad (241)$$

Nótese que esta expresión del potencial plástico es similar a la función de fluencia, con la diferencia en el parámetro  $m_{bdil}$  denominado como parámetro de dilatación y toma en cuenta la posibilidad de emplear plasticidad Asociada al hacer que  $m_{bdil} = m_b$ , o plasticidad No asociada al hacer que  $m_{bdil} \neq m_b$ .

Hasta este momento es claro que existe dependencia directa, entre el parámetro de endurecimiento  $K$ , (necesario para definir la función de fluencia  $F$ ) y el potencial plástico  $Q$ , a través de los incrementos de deformación plástica  $d\varepsilon^P$ , por ello, deberá tomarse en cuenta que el definir al parámetro  $m_{bdil}$  del criterio de rotura de macizos rocosos, se estará definiendo el tipo de comportamiento tensional, ya sea perfectamente plástico o reblandeciente.

No existen reglas específicas acerca del comportamiento plástico de los macizos rocosos, debido al carácter complejo de los mismos, por ello, el parámetro de dilatación  $m_{bdil}$  debe ser definido en base a recomendaciones del comportamiento tensional del material y a partir de las estimaciones propuestas por Hoek, presentadas más adelante.

Por otra parte, la magnitud de las deformaciones plásticas  $d\lambda$ , puede ser determinada considerando una variación infinitesimal de las tensiones que se encuentran sobre una superficie de fluencia, y que en todo momento debe cumplirse que  $dF = 0$ .

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \kappa} d\kappa = 0 \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (242)}$$

Donde se sabe que el parámetro de endurecimiento y los incrementos de deformaciones plásticas vienen dados por:

$$\kappa = f(\varepsilon^p) \quad \text{y} \quad d\varepsilon^p = d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (243)}$$

Encontrando un incremento del parámetro de endurecimiento y sustituyendo los incrementos de deformación plástica se tiene:

$$d\kappa = \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p} d\varepsilon^p \quad \text{ó} \quad d\kappa = \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p} d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (244)}$$

Reemplazando este último en la variación infinitesimal de tensiones se obtiene:

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p} d\lambda \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (245)}$$

Despejando la magnitud de las deformaciones plásticas  $d\lambda$  se obtiene finalmente:

$$d\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (246)}$$

Dónde el término  $H$  se denomina módulo plástico y se expresa como sigue:

$$H = - \frac{\partial F}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon^p} \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad \dots\dots\dots \text{Ecuación (247)}$$

Queda claro que lo recopilado en esta investigación, representa una cantidad limitada de lo que respecta a la teoría de la plasticidad, por ello, se recomienda al lector, revisar bibliografía de tratado riguroso, sobre el tema.

**4.5.5.2 Características post-pico de los macizos rocosos**

Las características post-pico o residuales, representan aquellos parámetros que determinaran el comportamiento resistente del macizo rocoso, después de haber superado el límite resistente elástico. Estas características pueden ser usadas para formar un criterio de resistencia residual a partir de una expresión similar a la del criterio de pico empírico obtenido por Hoek y Brown, teniéndose:

$$\sigma'_1 = \sigma'_3 + \sigma_{ci} \left( m_{b\ res} \frac{\sigma'_3}{\sigma_{ci}} + s_{res} \right)^{a_{res}} \dots\dots\dots \text{Ecuación (248)}$$

Queda claro que este nuevo criterio es similar al criterio de pico, con diferencias en los parámetros  $m_{b\ res}$ ,  $s_{res}$ ,  $a_{res}$ , que determinan la variación.

En apartados anteriores se mencionó sobre la no existencia de reglas claras de las características post-pico, por tanto, puede utilizarse algunas aproximaciones en base a un índice geológico de resistencia residual  $GSI_{res}$  o pautas generales seguidas por E. Hoek, presentadas por Crowder y Bowden:

- a. Rocas masivas y frágiles ( $70 < GSI < 90$ )

Altas tensiones que resultan en falla de roca intacta.

Toda la resistencia es perdida en la falla.

$s_{res} = 0$ ,  $m_{b\ res} = 1$  y el parámetro de dilatación  $m_{bdil} = 0$

- b. Rocas fuertes discontinuas ( $50 < GSI < 65$ )

Niveles moderados de tensión, que resultan en la falla de las discontinuidades.

La roca falla en una 'grava'

$s_{res} = 0$ ,  $m_{b\ res} = 15$  y el parámetro de dilatación  $m_{bdil} = 0,3m_{b\ res}$

- c. Rocas Intermedias discontinuas ( $30 < GSI < 50$ )

Granito resistido, esquisto, arenisca

Suponer reblandecimiento por deformación, pérdida de resistencia a la tracción, resistencia al corte retenida.

$s_{res} = 0$ ,  $m_{b\ res} = 0,5m_b$ , y el parámetro de dilatación es pequeño.

d. Roca muy débil ( $GSI < 30$ )

Severo corte/plegado tectónico (filita)

Comportamiento Elástico-Perfectamente plástico, no hay dilatación.

$s_{res} = s$ ,  $m_{b\ res} = m_b$ , y el parámetro de dilatación  $m_{bdil} = 0$

Para estas pautas puede tomarse constante el parámetro  $a_{res}$  es decir  $a_{res} = a$ .

Puede hacerse uso también de una expresión en base a un parámetro de resistencia residual  $GSI_{res}$  presentada por Cai et al en el año 2007, obtenida por medio de ajustes a la evaluación de distintos macizos rocosos, teniéndose:

$$GSI_{res} = 17,245 \exp(0,0107 GSI) \dots\dots\dots \text{Ecuación (249)}$$

Como puede notarse, el parámetro  $GSI_{res}$  se podrá determinar a partir del parámetro  $GSI$  del criterio de pico, que servira para determinar los parámetros residuales  $m_{b\ res}$   $s_{res}$   $a_{res}$  a partir de las expresiones del criterio pico.

Utilizando las pautas propuestas por Hoek, para un índice geológico de 43 se obtiene:

**Tabla 21**  
*Parámetros residuales*

Parametros residuales	$m_{b\ res}$	$s_{res}$	$a_{res}$	$m_{bdil}$
valores	0,485	0	0,5	0

#### 4.5.6 Esfuerzos in-situ

Cuando se desea realizar un proyecto de excavación en un macizo rocoso, es necesario investigar los procesos que dieron origen a la formación del mismo, y en muchos casos esta investigación suele evidenciar que los macizos rocosos se encuentran sometidos a un estado tensional preexistente a la fase de excavación.

En muchos casos los macizos rocosos poseen dos direcciones principales de tensiones, el primero debido a tensiones gravitacionales debido al peso de los materiales que conforman al macizo rocoso, y el segundo debido a tensiones que son producto de un historial geológico tales como la consecuencia de los procesos tectónicos.

En la siguiente figura se presenta los resultados de las mediciones realizadas por Hoek para los esfuerzos verticales en distintas partes del mundo:

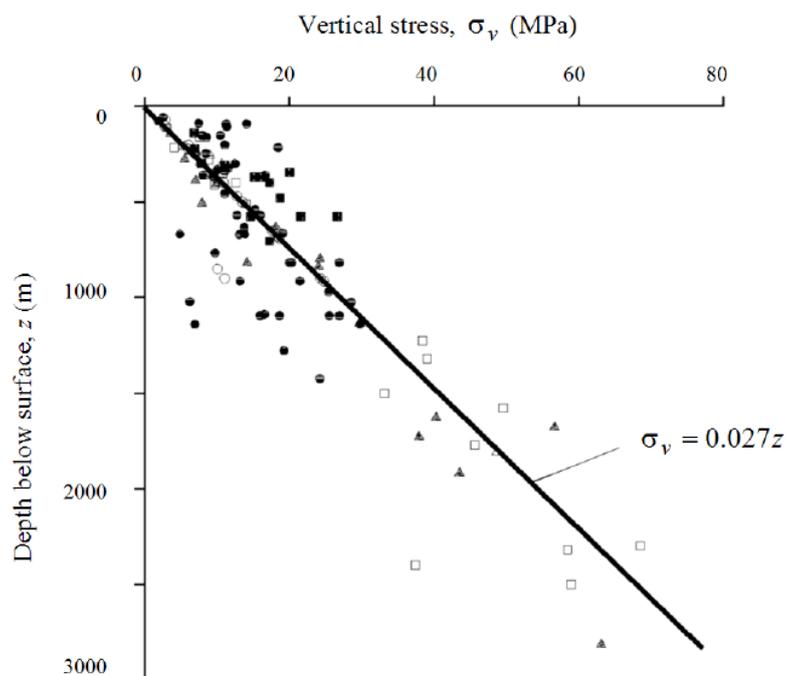


Figura 64. Esfuerzos verticales respecto a la profundidad bajo la superficie  
Fuente: Hoek, Practical Rock Engineering, 2014

Puede notarse la tendencia que tienen las mediciones, a ajustarse a una ecuación lineal, y similar a la correspondiente carga litostatica a cierta profundidad, dada por la siguiente expresión:

$$\sigma_v = \gamma H \dots\dots\dots \text{Ecuación (250)}$$

Teniendo en cuenta que el peso específico de la roca oscila con valores de 0,020 a 0,030 MN/m<sup>3</sup>, resultan correctas las estimaciones realizadas por la ecuación anterior.

Es posible relacionar los esfuerzos horizontales con los esfuerzos verticales a través de un término  $k$ , este término fue usado para realizar un gráfico de las mediciones realizadas para esfuerzos horizontales y se presenta en la siguiente figura:

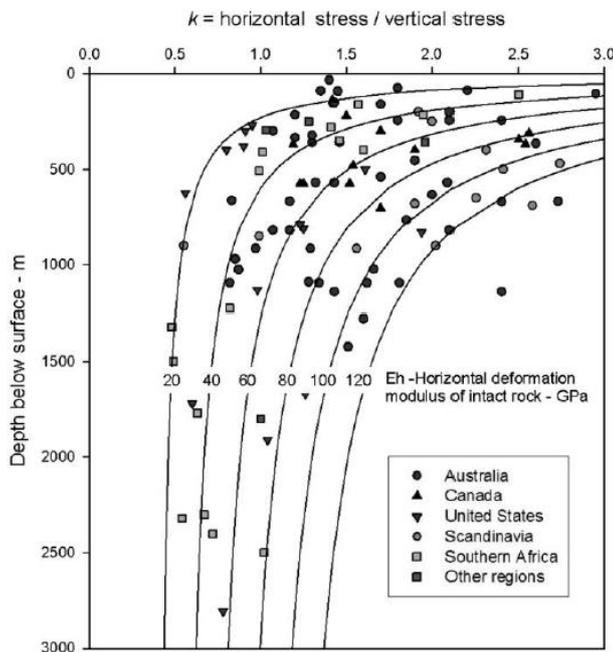


Figura 65. Variación de la relación k respecto de la profundidad  
Fuente: Hoek, Practical Rock Engineering, 2014

Puede notarse que a profundidades considerables, las mediciones estabilizan el término  $k$ , con una tendencia igual a la unidad, lo que reflejaría que los esfuerzos verticales y horizontales son iguales para dicha condición.

Sheorey en 1994 realizo investigaciones para hallar la variación de tensiones, teniendo en cuenta la curvatura de la corteza terrestre, y las variaciones que tienen las constantes elásticas, densidades y coeficientes de expansión térmica con la profundidad, obteniendo la siguiente ecuación:

$$k = 0,25 + 7 E_h \left( 0,001 + \frac{1}{z} \right) \dots\dots\dots \text{Ecuación (251)}$$

Donde  $z(m)$  es la altura por debajo de la superficie y  $E_h (GPa)$  es el módulo de deformación suprayacente a la zona de estimación medido en la dirección Horizontal. Considerando un valor aproximado de 25,08 GPa para obtenido a partir de los ensayos de laboratorio y una profundidad de 115,87m se tiene:

$$k = 1,94 \dots\dots\dots \text{Ecuación (252)}$$

El siguiente grafico muestra las mediciones realizadas en Chile, este puede ser superpuesto con el grafico anterior, y podrán demostrar la tendencia que tienen hacia las curvas  $E_h$  igual a 20, por tanto, resulta coherente la estimación obtenida.

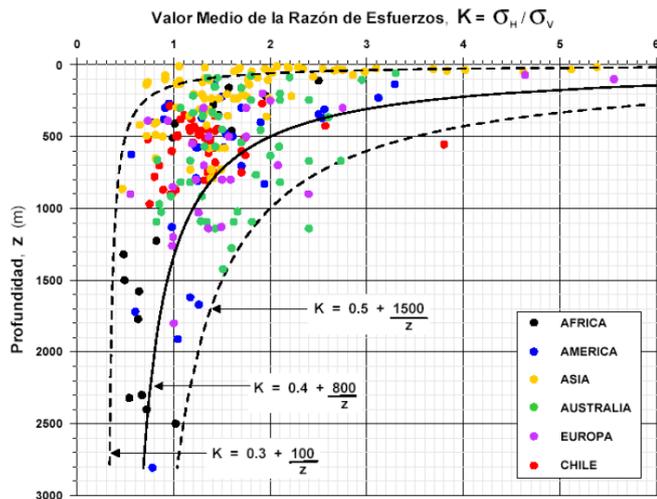


Figura 66. Variación de la relación k, considerando datos de Chile

#### 4.5.6.1 *Mapa mundial de esfuerzos.*

El mapa mundial de esfuerzos es una base de datos que recopila la orientación de las tensiones naturales principales máximas compresivas, en diversas partes del mundo. En este mapa podrá encontrarse (1) las orientaciones (2) los métodos de medición y (3) la calidad de medición.

En las siguientes figuras se presenta el mapa mundial de esfuerzos, el mapa de mediciones realizadas para el Perú y el mapa correspondiente al área del proyecto del Túnel 04. Puede visualizarse en la tercera figura, que en las cercanías al proyecto se realizaron mediciones de mecanismos focales y mediciones de fracturas inducidas, estas últimas con buena calidad (calidad A), notándose que estas mediciones quedan cuasi perpendiculares a la dirección del túnel 04, lo que podría ser beneficioso, debido a que no se presentarían estallidos de roca (rockbursting) en el frente del Túnel 04.

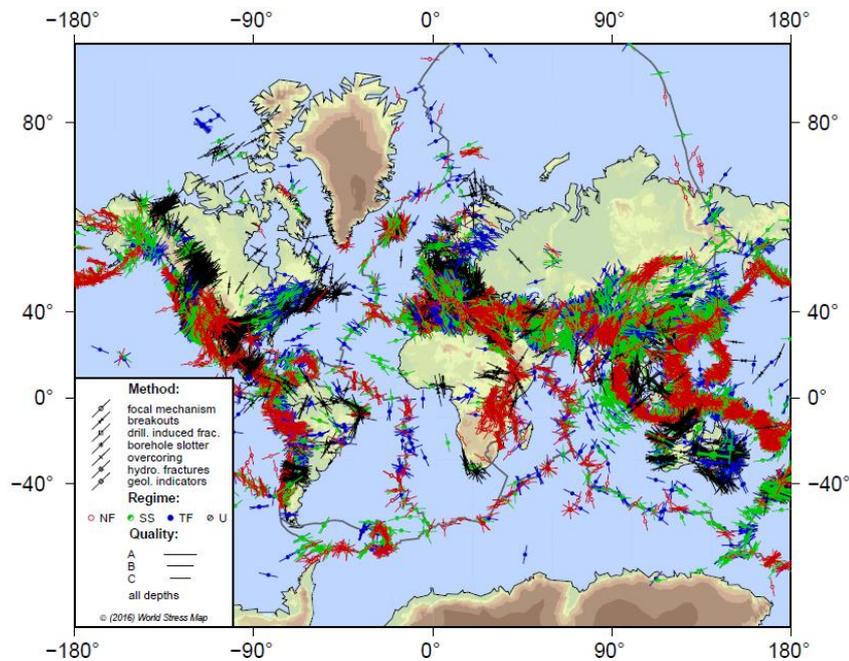


Figura 67. Mapa mundial de esfuerzos

Fuente: Centro de Investigación Alemana para Geociencias

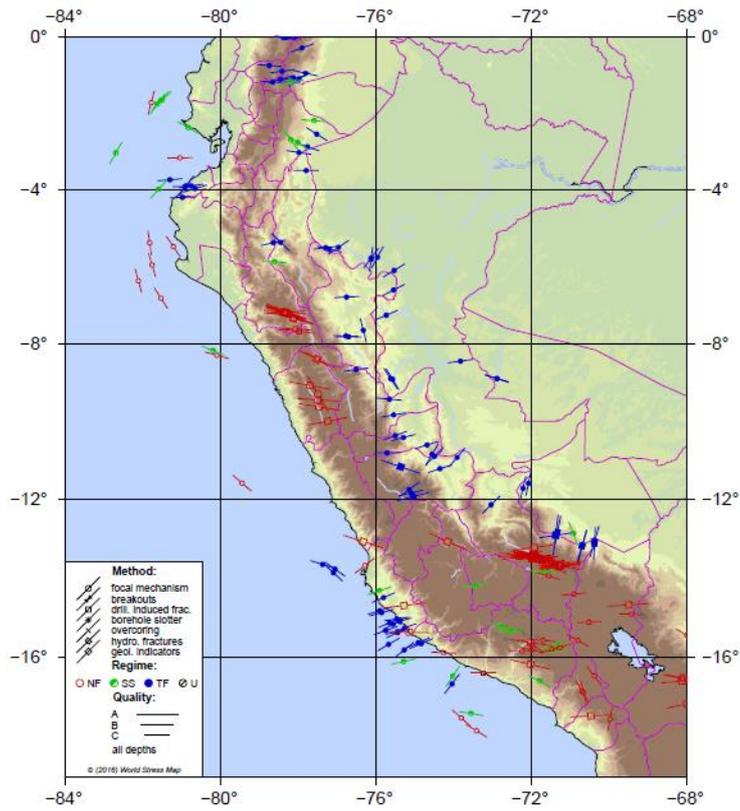


Figura 68. Mapa mundial de esfuerzos – América del Sur  
Fuente: Centro de Investigación Alemana para Geociencias

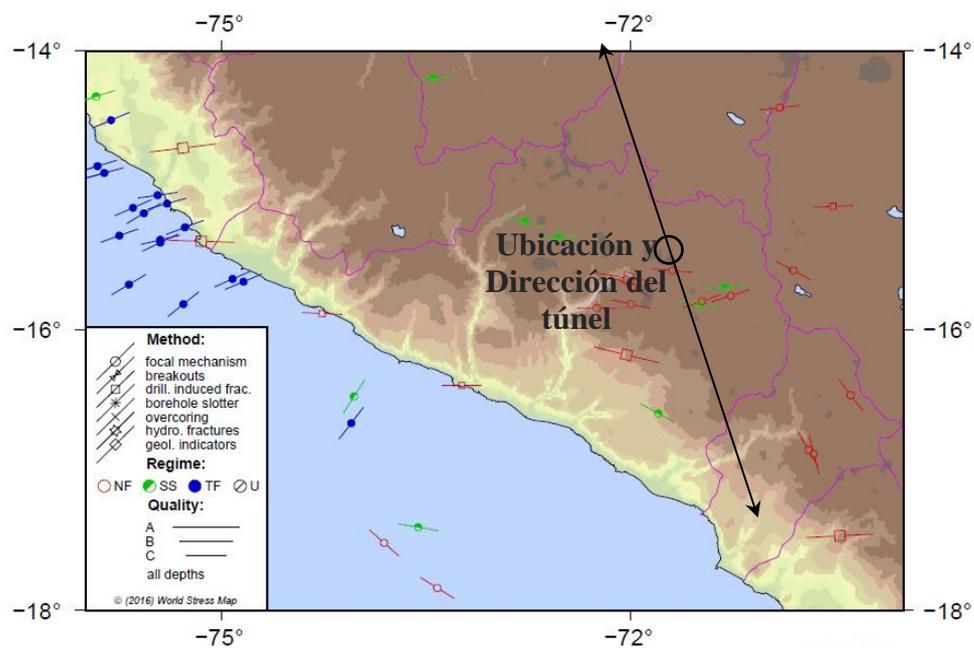


Figura 69. Mapa mundial de esfuerzos horizontales para Arequipa  
Fuente: Centro de Investigación Alemana para Geociencias

#### 4.5.7 Forma y dimensiones del túnel 04

En muchos casos la forma de la excavación queda condicionada a la forma de los equipos que pueda albergarse o a la de forma existente natural. En la actualidad muchas excavaciones son realizadas tomando una forma de herradura simple para excavaciones a bajas profundidades o herradura modificada para excavaciones a gran profundidad, esta última debido a magnitudes considerables tensionales.

El proyecto del túnel 04 deberá albergar a un canal de conducción de caudal igual a  $10\text{m}^3/\text{s}$ , y la forma podría estar condicionada a la sección del canal, por ello se elige una sección de herradura simple, considerando que la excavación se encuentra a baja profundidad. Debe tenerse en cuenta que existen condiciones mínimas de trabajabilidad, al momento de la excavación, y estas determinaran algunas de las dimensiones de la sección.

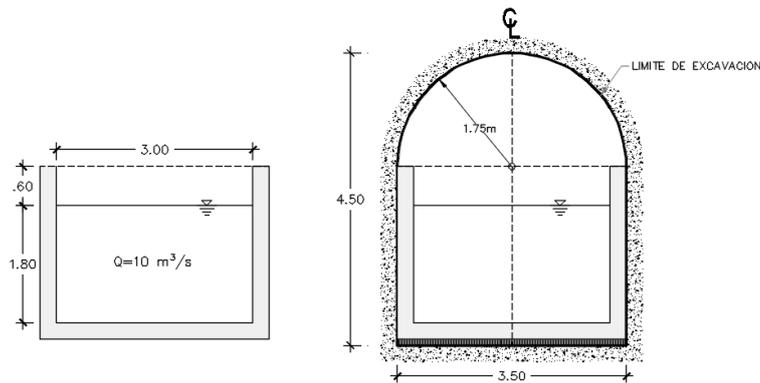
Las dimensiones de la sección pueden ser establecidas a partir de los siguientes criterios, que se harán uso para establecer condiciones mínimas.

- Las condiciones mínimas dentro de un túnel exigen que la altura mínima sea de 2,80 m, esto debido a que la maquinaria con la que vaya a realizarse los trabajos de excavación, tales como Jumbos utilizados en proyectos peruanos, poseen una altura promedio de 2,80 m.
- El diámetro mínimo de un conducto de ventilación oscila en el margen de 24 a 28 pulgadas (0,60 m a 0,70 m), este conducto es usualmente colocado en la parte superior del túnel.

A partir de lo anterior, puede considerarse el siguiente diámetro mínimo de la bóveda de excavación:

$$D_{\min} = 2,80\text{ m} + 0,70\text{ m} = 3,50\text{ m} \dots\dots\dots \text{Ecuación (253)}$$

Teniéndose:



#### 4.5.8 Análisis numérico del túnel 04

El comportamiento deformacional y tensional de un macizo rocoso, posee carácter tridimensional, y es claro que el análisis numérico a realizarse debería ser efectuado en el mismo escenario, siempre y cuando, se tenga como requisito fundamental, la realización de una campaña rigurosa de recolección de parámetros de entrada. En la actualidad, diversos túneles con carácter relevante, han sido analizados a nivel tridimensional, lo cual refleja un estado superior en la fase de investigación y procesamiento numérico. Por otra parte los análisis bidimensionales son aún muy utilizados, debido a que el carácter tridimensional de un macizo rocoso, puede ser simplificado a un análisis de secciones de túnel en dos dimensiones, para los casos en las que la geometría de la excavación no sea compleja, las dimensiones de la sección de túnel sean mucho menores que la longitud del túnel y que los extremos del túnel no tengan influencia en las secciones de análisis, etc.

El método de elementos finitos, es en sí, uno de los métodos más utilizados para poder realizar la evaluación numérica del comportamiento del macizo rocoso ante una excavación en el mismo, pero debe tenerse en cuenta, que

la existencia de discontinuidades en un medio considerado como continuo, es aún una desventaja de evaluación. Algunos puntos de partida para el uso del método son:

*a. Selección del modelo matemático*, el modelo debe ser aquel que tenga en cuenta la realidad física del medio de análisis, por ello, es posible modelar una cierta zona de influencia que sea representada por una sección con fronteras inferiores y laterales de aproximadamente 5 veces el diámetro del túnel, tal y como se presenta en la siguiente figura:

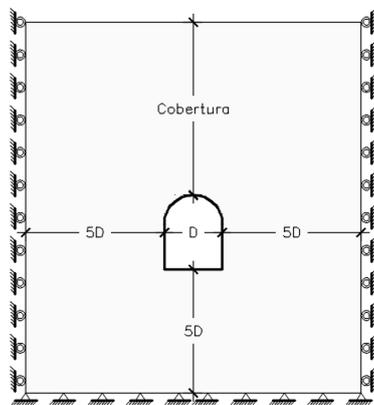


Figura 71. Modelo matemático y dimensiones de análisis

Puede notarse en este gráfico la libertad de movimiento vertical asignado en los laterales y las restricciones de movimiento en la base, lográndose con esto asignar el movimiento típico resultante de la superficie y la nulidad de desplazamientos por debajo del túnel.

El túnel 04 del proyecto de análisis posee una bóveda de diámetro igual a 3.5 m, por ello las fronteras y la base distan del túnel a 17.5 m. La parte superior del túnel, queda definida por la cobertura presentada en la topografía, de dimensión igual a 111,875 m.

En esta etapa debe contarse con las propiedades mecánicas de los materiales que conforman el modelo, como también deberá elegirse el comportamiento de los

materiales, ya sea elástico, elasto-plástico perfecto o elasto-plástico con endurecimiento o reblandecimiento, a nivel lineal o no lineal.

La presente aplicación tomara en cuenta un modelo Elástico y Elasto-plástico, de propiedades mecánicas mostradas en el siguiente cuadro resumen:

**Tabla 22**

*Propiedades mecánicas de los materiales*

Modelo	Modulo de Elasticidad (MPa)	Modulo de Poisson
Elastico y Elastoplastico	3162	0,25

**b. Discretización del modelo de análisis**, una vez definido el modelo matemático, debe realizarse la división del mismo, en porciones no intersectantes entre sí, denominados “elementos finitos”. Esta división es muy importante para el método, debido a que de esta etapa dependerán los resultados obtenidos. El tamaño y cantidad de los elementos finitos, depende del tipo de elemento a utilizarse, por ejemplo, el elemento finito de 4 nodos con modos incompatibles demostró que requiere de una cantidad reducida de elementos, para poder otorgar resultados confiables.

La división rigurosa en zonas en las que se espera una alta concentración de esfuerzos o en zonas agudas, es una de las recomendaciones recurrentes encontradas en la literatura acerca del método, por ello programas como SAP2000 y Phase2, poseen subrutinas de mallado automático con refinamiento adaptable, con el que puede cumplirse esta recomendación.

#### 4.5.8.1 Ejemplo de Convergencia

En esta sección se evalúa a dos modelos matemáticos discretizados del túnel 04, el primero realizado en el programa SAP2000, utilizando elementos finitos de 4 nodos con modos incompatibles y el segundo en el programa Phase2, utilizando elementos finitos de 3 nodos. Ambos modelos se realizan en un escenario no realista, en el que solo existe deformación debido al peso propio, considerando la hipótesis de deformación plana con espesor constante e igual a 1 m en condición elástica lineal, este análisis servirá para evaluar la convergencia tenso-deformacional ofrecida por ambos modelos.

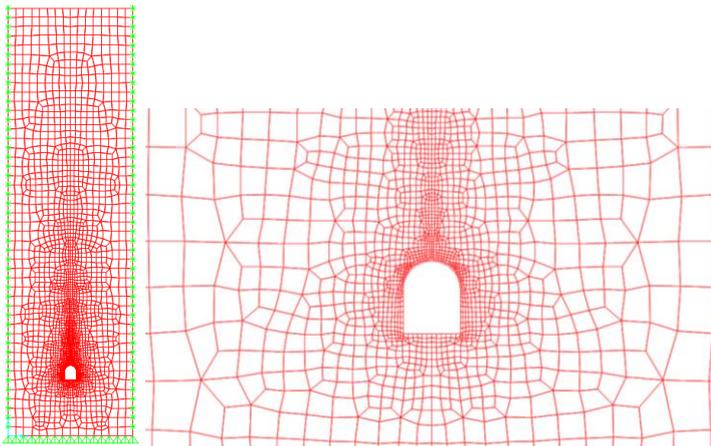


Figura 72. Modelo matemático discretizado en el programa SAP2000

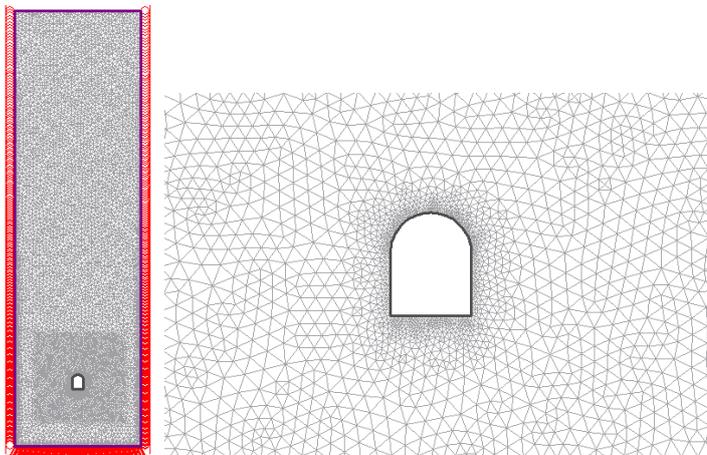


Figura 73. Modelo matemático discretizado en el programa Phase2

En las anteriores figuras, se presentó los modelos de análisis, y puede notarse el mallado automático, adaptativo para cada uno de ellos. Cabe mencionar que para el modelo del programa Phase2 se realizó un refinamiento manual adicional en las proximidades del túnel, esto se realizó con el fin de obtener elementos más pequeños en la periferia de la excavación.

En las siguientes figuras se presenta gráficos de contornos de desplazamientos resultantes, además de presentar los valores de desplazamientos verticales en la clave del túnel, en ellas puede notarse que los valores encontrados en ambos programas, poseen valores relativamente iguales y que solo fue posible con un mallado riguroso, de los elementos de 3 nodos del programa Phase2.

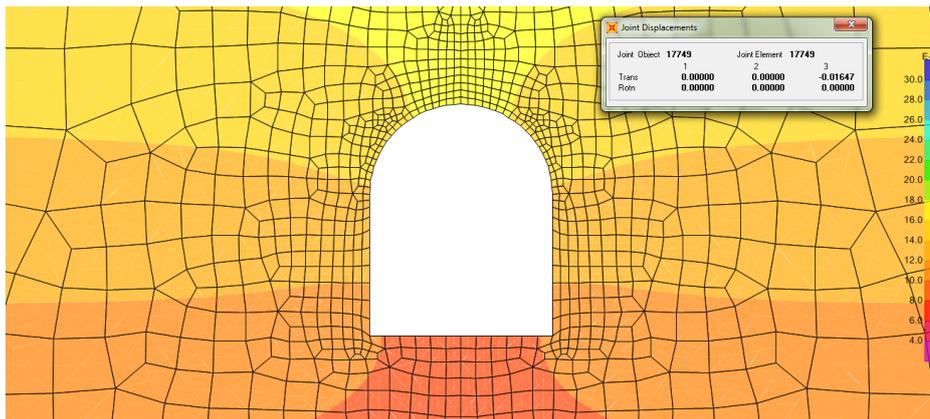


Figura 74. Contornos de desplazamientos resultantes en el programa SAP2000

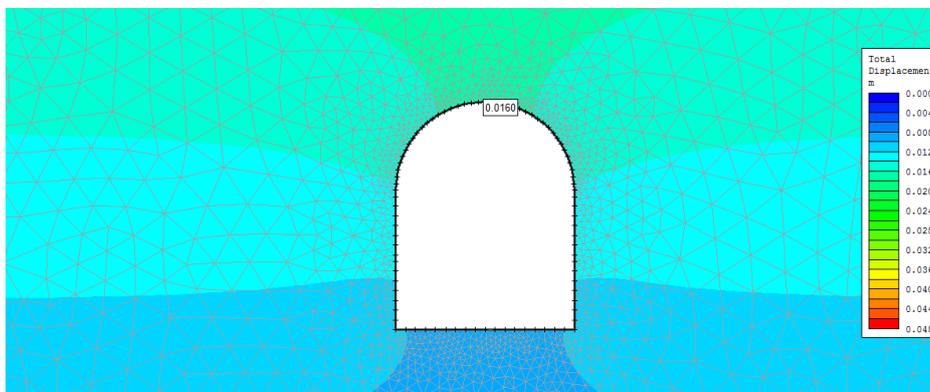


Figura 75. Contornos de desplazamientos resultantes en el programa Phase2

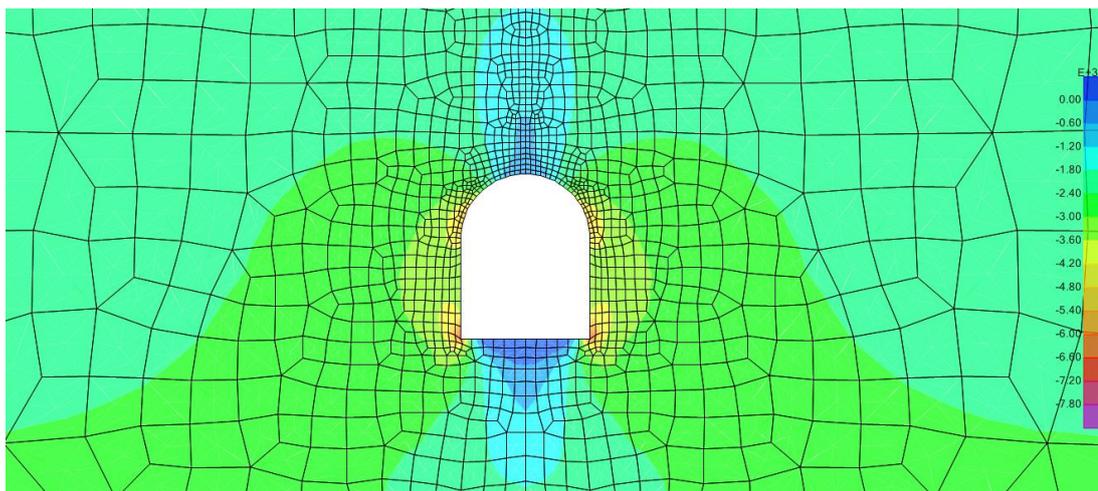
La siguiente tabla, presenta la comparación de desplazamientos resultantes para ciertas zonas del túnel, en ella podrá notarse la variación casi nula de desplazamientos, entre ambos programas:

**Tabla 23**

*Comparación de desplazamientos SAP2000 - Phase 2*

Ubicación	Magnitudes de Desplazamientos Resultantes (m)	
	SAP2000	Phase2
Clave	0,01647	0,01645
Hastiales	0,00130	0,00130
Solera	0,00893	0,00896
Zonas agudas	0,01060	0,01063

De la misma manera puede realizarse una comparación de tensiones a través de contornos de igual magnitud. Cabe destacar que el programa SAP2000 posee una convención de signos distinta a la convención geotécnica del programa Phase 2, por ello la comparación será realizada a partir de las magnitudes de las tensiones principales máximas del programa Phase 2 y de las magnitudes de las tensiones principales mínimas del programa SAP2000.



*Figura 76. Contornos de iso tensión principal mínima en el programa SAP2000*

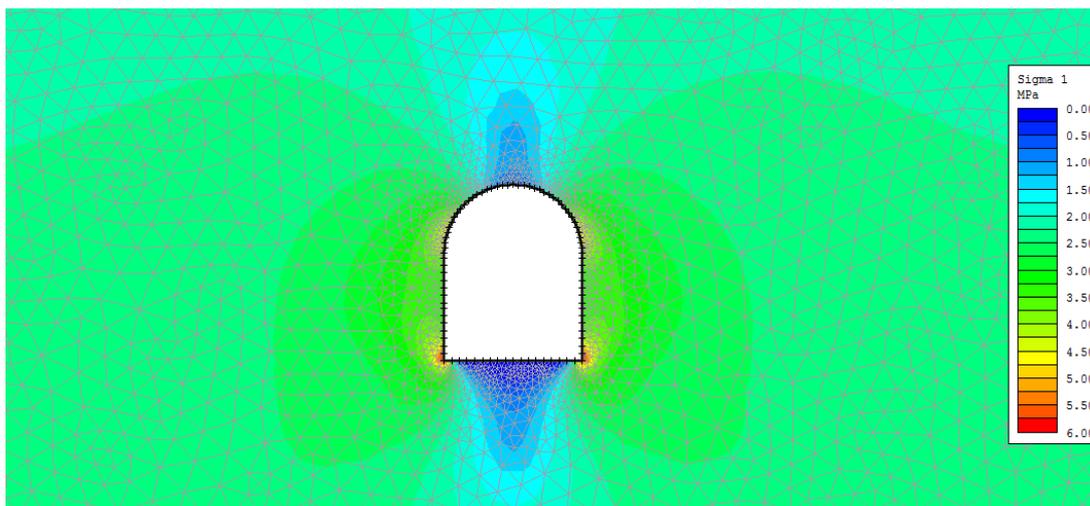


Figura 77. Contornos de iso tensión principal mínima en el programa Phase2

En los gráficos anteriores, puede notarse una variación mínima de los contornos de iso tensión, esto debido a una mínima variación de las magnitudes de las tensiones para ambos programas, y que son presentadas en la siguiente tabla:

**Tabla 24**

*Comparación de esfuerzos principales SAP2000-Phase 2*

Ubicación	Magnitudes de Esfuerzos Principales (MPa)	
	SAP2000	Phase2
Clave	0,4696	0,5721
Hastiales	3,2370	3,2650
Solera	0,0128	0,0123
Zonas agudas	6,5966	5,5834

La tabla anterior muestra la mínima diferencia que ofrecen ambos programas para las magnitudes de los esfuerzos principales en los hastiales y solera del túnel. Esto último es contrario a los resultados ofrecidos para la clave y las zonas agudas, por tanto, es recomendable un mallado aún más riguroso en estas zonas, a fin de superar estas diferencias.

Cabe resaltar que la diferencia entre la rápida convergencia de los resultados desplazamientos y los aun no tan convergentes resultados de las tensiones, se deben a que estas últimas son halladas en función de las derivadas de

los desplazamientos, lo que podría conducir a una menor aproximación de convergencia.

Finalmente, se concluye una vez más que el elemento finito de 3 nodos y la discretización rigurosa de malla usada en el programa Phase2, ofrecen resultados confiables a la hora de analizar estructuras que presenten comportamientos de predominancia compresiva, tal como lo que se presentó en el modelo analizado, y que puede ser demostrado bajo los siguientes gráficos de las trayectorias que toman los esfuerzos principales y de los vectores de desplazamientos resultantes.

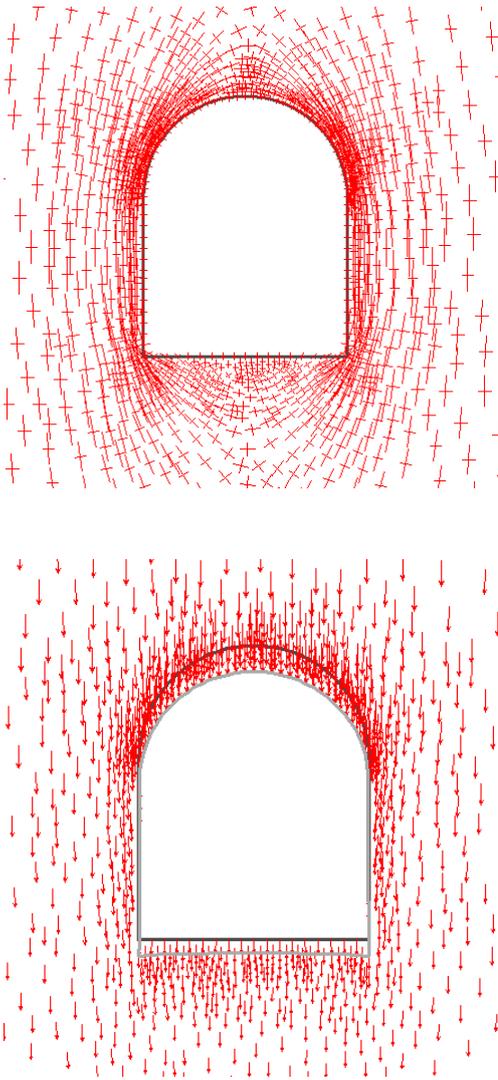


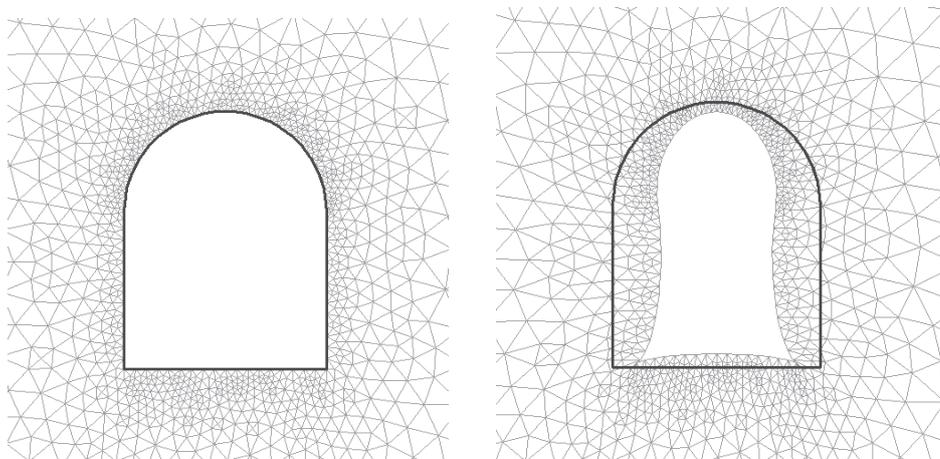
Figura 78. Trayectorias de esfuerzos principales y vectores de desplazamiento

#### 4.5.8.2 *Análisis elástico del túnel 04*

Por muchos años, las excavaciones en roca se limitaban a un comportamiento elástico del material, siendo válida esta suposición para una cierta cantidad de excavaciones, tales como aquellas que se presentan en coberturas moderadas y clasificadas actualmente a través de un índice geológico de resistencia “GSI” mayor a 60. Por otra parte, aquellas excavaciones en las que no eran válidas estas suposiciones, eran analizadas y diseñadas de forma antieconómica, debido a que en todo momento se pretendía evitar la rotura del material, conduciendo esto, a sobredimensionar los elementos de soporte y fortificación.

En este apartado, se presenta el análisis elástico del túnel 04 sometido a las estimaciones de tensiones naturales, este análisis tiene la finalidad de presentar algunas herramientas de evaluación tensional en función de la resistencia pico del macizo rocoso.

En lo siguiente se presentan los resultados numéricos de desplazamientos para la excavación a través de gráficos de deformación y gráficos de vectores de desplazamiento resultante.



*Figura 79.* Malla de elementos finitos deformada para el análisis elástico

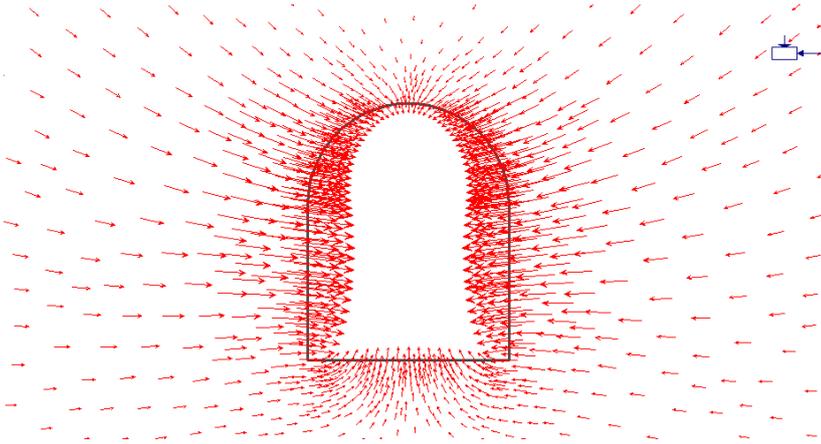


Figura 80. Vectores de desplazamiento para el análisis elástico

Las magnitudes de los vectores de desplazamiento resultante pueden ser obtenidas a partir de un gráfico de contornos de igual desplazamiento resultante, tal como el que se presenta a continuación:

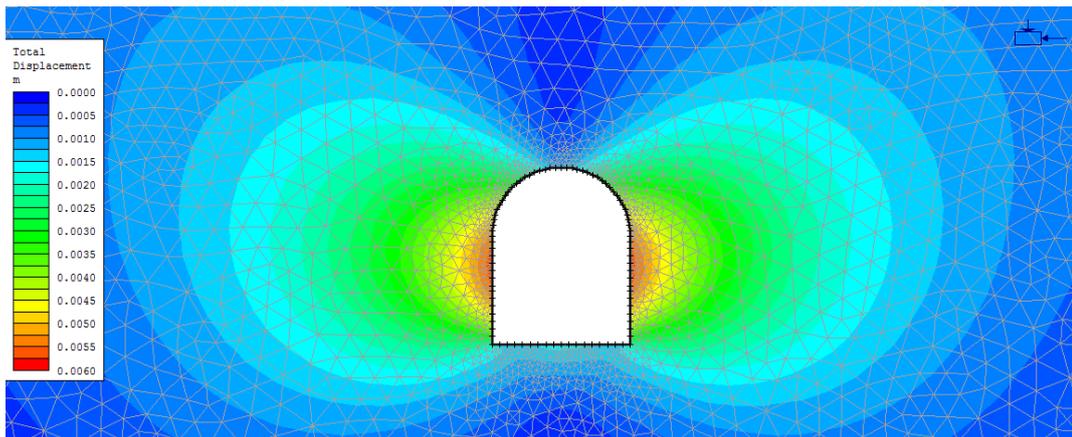


Figura 81. Contornos de desplazamientos para el análisis elástico

En cada uno de los gráficos presentados anteriormente, se observa que la cavidad tiende a cerrarse, lo cual resulta coherente debido a los efectos compresivos de las tensiones naturales. Puede notarse también que las máximas deformaciones, se encuentran en los hastiales del túnel y con magnitudes máximas de aproximadamente 5,6 mm.

Conocidos los desplazamientos, es posible calcular las tensiones inducidas, las cuales son esfuerzos en la dirección X e Y y esfuerzos cortantes XY, estos se muestran en las siguientes figuras:

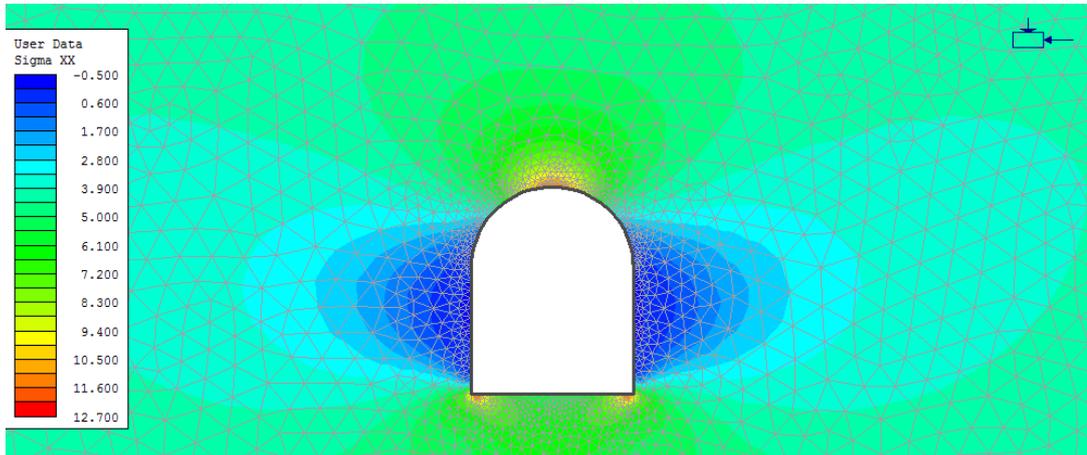


Figura 82. Contornos de tensión normal en la dirección X, del análisis elástico

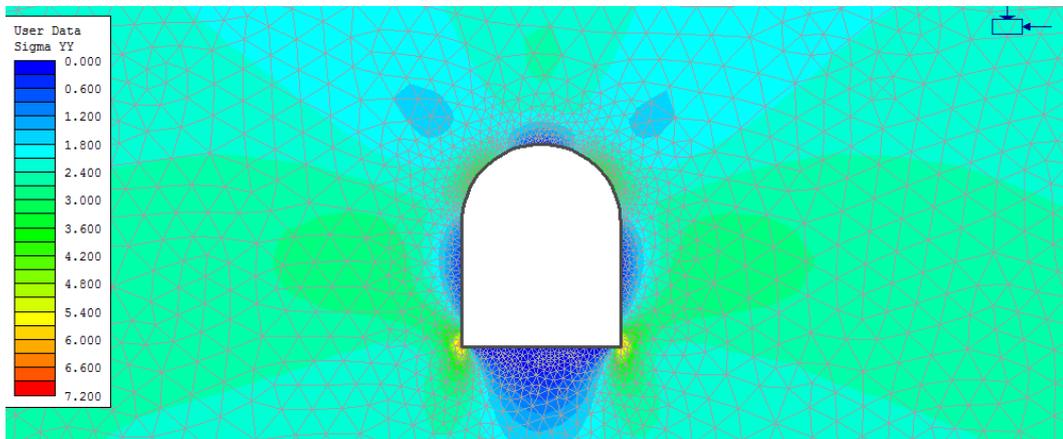


Figura 83. Contornos de tensión normal en la dirección Y, del análisis elástico

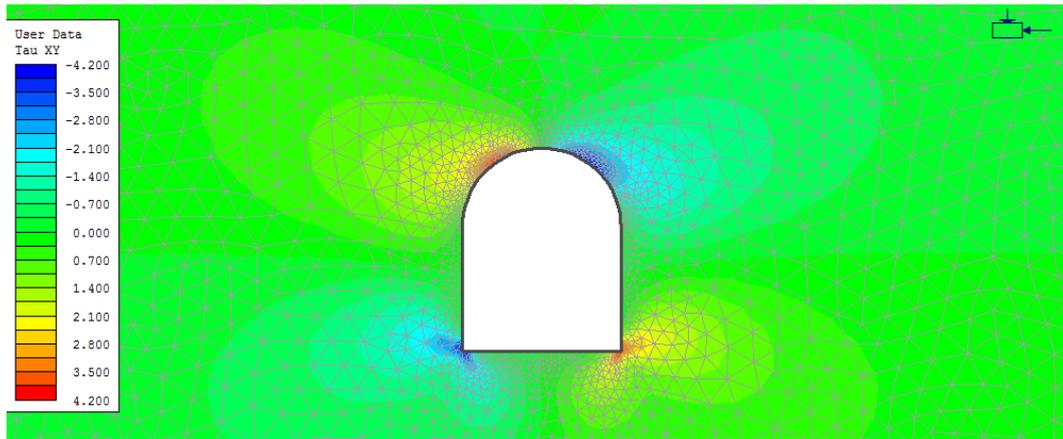


Figura 84. Contornos de iso tensión cortante XY, para el análisis elástico

Los contornos de tensiones normales X e Y pueden ser interpretadas a partir de realizar un gráfico considerando una variación infinitesimal de la periferia de la sección de la excavación, teniéndose:

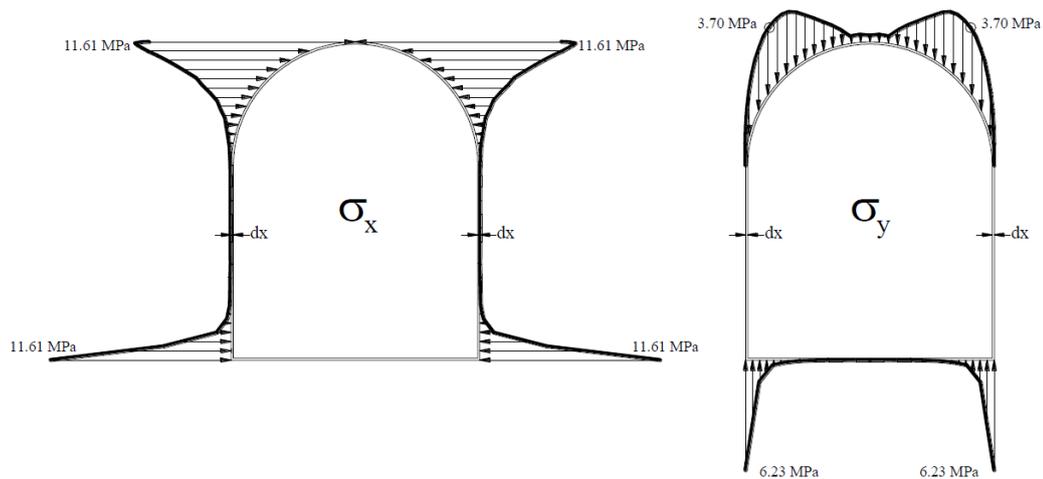


Figura 85. Interpretación de los esfuerzos normal X e Y

Los esfuerzos normales X e Y y el esfuerzo Cortante XY, serán utilizados para calcular los esfuerzos principales máximos y mínimos, que a su vez, servirán para realizar la verificación de rotura. Estas tensiones principales se presentan mediante los siguientes gráficos de contornos de igual tensión:

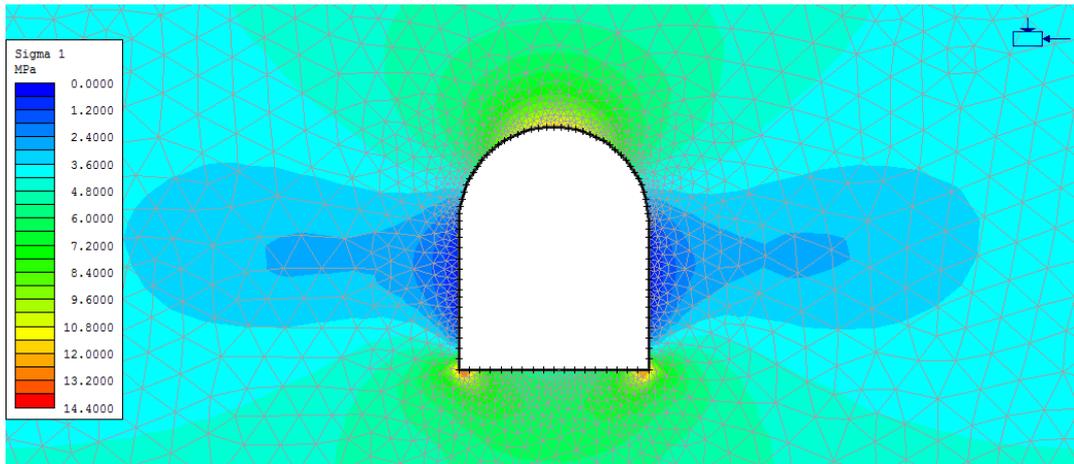


Figura 86. Contornos de iso tensión principal máxima, para el análisis elástico

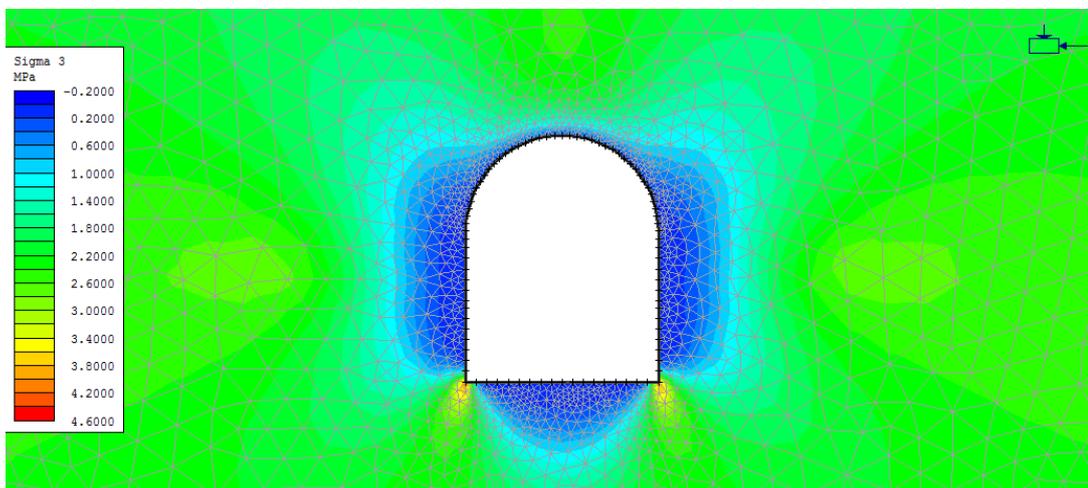


Figura 87. Contornos de iso tensión principal mínima, para el análisis elástico

Estos últimos contornos de tensiones principales pueden ser comparados con las distribuciones de esfuerzos alrededor de excavaciones unitarias, preparadas en el Imperial College por el Dr. Elsayed Ahmed Eissa, bajo la dirección del Dr. J. W. Bray, utilizando el Método de Elementos de contorno Bidimensional, tal como la que se presenta en la siguiente figura:



$$\sigma_v = \gamma H = (0,0197)(115,87) = 2,28 \text{ MPa} \dots\dots\dots \text{Ecuación (254)}$$

Valor que será utilizado para calcular el esfuerzo principal máximo en la clave del túnel, a través de la distribución de esfuerzos normalizada con respecto al producto de la relación de esfuerzos  $k$  y del esfuerzo vertical in situ  $\sigma_v$ , mostrados en la Figura 88, la cual presenta un valor normalizado igual a 2.7, que proporcionara un esfuerzo principal máximo igual a:

$$2,7 k \sigma_v = 2,7(1,94)(2,28) = 11,96 \text{ MPa} \dots\dots\dots \text{Ecuación (255)}$$

Podrá notarse que este valor de esfuerzo, obtenido atravez del método de elementos de contorno por el Dr. Elsayed Ahmed Eissa, es muy similar al esfuerzo de 11,61 MPa, obtenido a través del análisis numérico por elementos finitos, realizado en el programa Phase2, por otra parte podrá notarse que las distribuciones de esfuerzos principales mayores y menores son iguales para ambos métodos, con lo cual se valida en cierta medida el Modelo numérico efectuado en el programa Phase 2.

Al haber realizado un análisis en condiciones de deformación plana, se cuenta con esfuerzos paralelos al eje del túnel, que pueden ser calculados mediante la siguiente expresión

$$\sigma_z = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} (\epsilon_x + \epsilon_y) \dots\dots\dots \text{Ecuación (256)}$$

Donde  $E$  es el módulo de Elasticidad,  $\nu$  es el módulo de Poisson y  $\epsilon_x$   $\epsilon_y$  son la deformaciones unitarias en la dirección X e Y, respectivamente. También pueden ser presentadas a partir del siguiente gráfico de contornos de igual tensión:

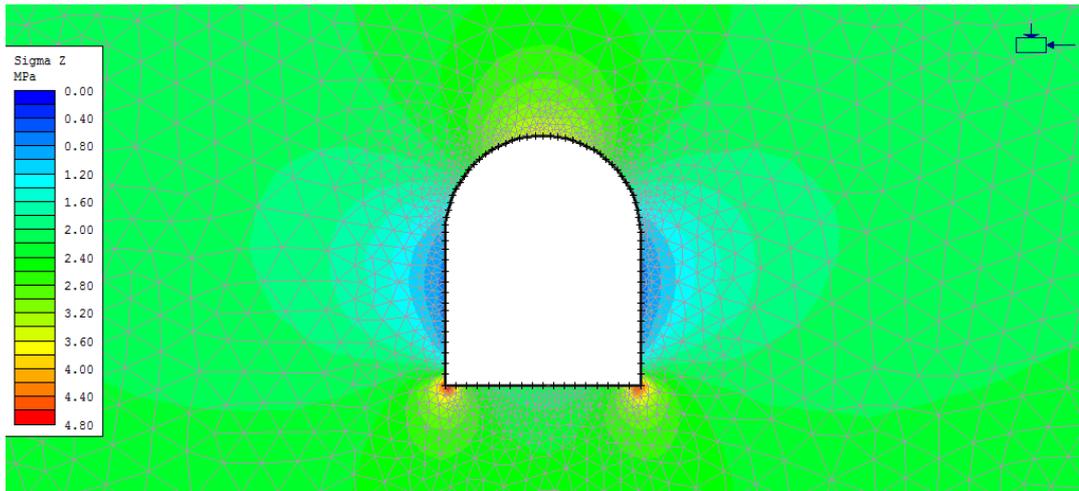


Figura 89. Contornos de iso tensión en Z, para el análisis elástico

La evaluación tensional del macizo rocoso, requiere de la utilización de algún criterio de rotura, tal como el criterio generalizado de Hoek y Brown. Este criterio de resistencia pico del macizo rocoso, requiere de los esfuerzos principales máximos y mínimos inducidos, con ellos podrá verificarse si dichos esfuerzos superan o no la resistencia pico del macizo rocoso. Existe una manera de presentar esta evaluación mediante un factor de resistencia, el cual será presentado en el siguiente apartado.

**a. Factor de resistencia.**

El factor de resistencia establece la relación entre la resistencia que posee un macizo rocoso y el estado tensional inducido para cada punto externo a la excavación. Esta forma de evaluación puede ser realizada a través de la siguiente ecuación incorporada en el programa Phase2:

$$\text{Factor de Resistencia} = \frac{S_{\max}}{S} \dots\dots\dots \text{Ecuación (257)}$$

Dónde:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \frac{1}{6} (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2$$

$$J_3 = S_x S_y S_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - S_x \tau_{yz}^2 - S_y \tau_{xz}^2 - S_z \tau_{xy}^2$$

$$S_x = \sigma_x - \frac{I_1}{3} \quad S_y = \sigma_y - \frac{I_1}{3} \quad S_z = \sigma_z - \frac{I_1}{3}$$

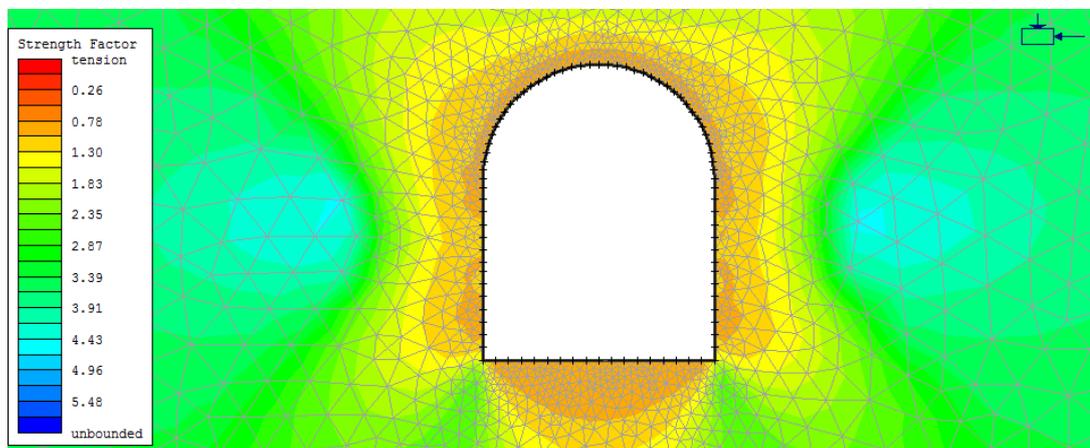
$$\theta = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( -\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}} \right), \quad -\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{\pi}{6}$$

$$S_{\max} = \frac{\sqrt{\left(1 + \frac{\tan \theta}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(\frac{m\sigma_c}{8}\right)^2 + \left(\frac{m\sigma_c I_1}{12} + \frac{s\sigma_c^2}{4}\right)} - \frac{m\sigma_c}{8} \left(1 + \frac{\tan \theta}{\sqrt{3}}\right)}{\cos \theta}$$

$$S = \sqrt{J_2}$$

*Ecuación (258)*

Al realizar la evaluación a través del factor de resistencia, podrá decidirse si se superó la resistencia en cada punto del macizo rocoso, al obtener valores mayores o iguales a la unidad. Esta evaluación puede ser presentada a través de un gráfico de contornos de igual factor de resistencia, tal como el siguiente:



*Figura 90.* Contornos de igual factor de resistencia, para el análisis elástico

La siguiente figura presenta las combinaciones de tensiones principales de la periferia de la excavación (tensiones inducidas en nodos de la malla de elementos finitos), que superan la resistencia pico del macizo rocoso, siendo estas aquellas que quedan por encima de la curva del criterio de rotura y que poseen un

factor de resistencia inferior a 1, cabe destacar también en este gráfico a las combinaciones de tensiones principales que no han superado la resistencia del macizo rocoso ubicadas por debajo de la curva del criterio de rotura, y que se encuentran en compresión con tendencia a la rotura por tracción.

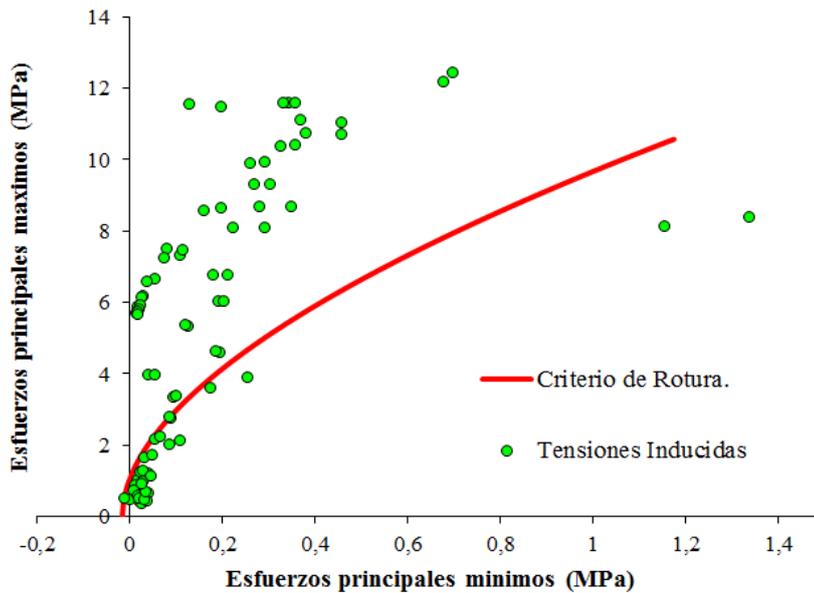


Figura 91. Evaluación de tensiones principales en la periferia de la excavación

#### 4.5.8.3 *Análisis elasto-plástico del túnel 04.*

El análisis elástico efectuado en el apartado anterior, reveló que una gran cantidad de zonas de la periferia de excavación, tales como la clave y solera, superaban la resistencia pico del macizo rocoso, por lo que, es necesario realizar un análisis de tipo elasto-plástico, que tome en cuenta el comportamiento post-pico de los sectores que tienden a admitir deformaciones permanentes e irreversibles.

Diversos estudios revelan que en condiciones favorables, las rocas tienden a realizar ciertos tipos de mecanismos de disipación de deformación, por ello, es que resulta coherente el utilizar la teoría de la plasticidad, para llevar a cabo criterios de fluencia.

El análisis plástico no requiere de la variación de la malla de elementos finitos propuesta en el análisis elástico, por ello, se presenta a continuación, los resultados numéricos de desplazamientos:

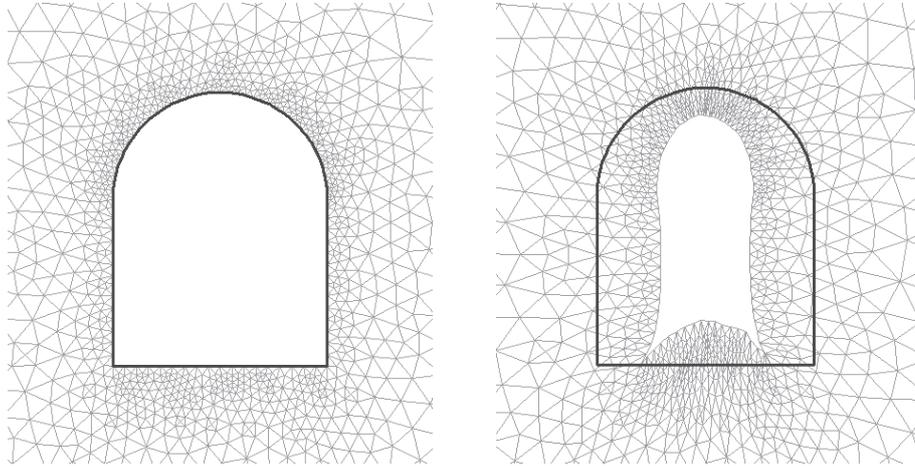


Figura 92. Malla de elementos finitos deformada para un análisis elasto-plástico

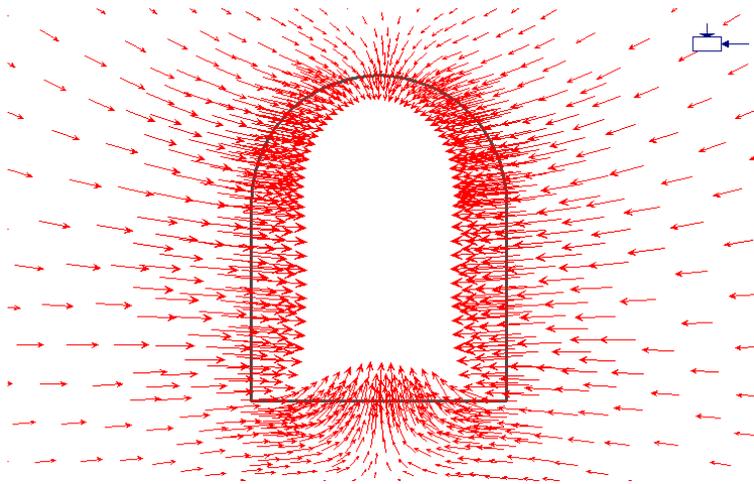


Figura 93. Vectores de desplazamientos para el análisis elasto-plástico

El anterior gráfico presento las direcciones de los vectores de desplazamientos y las magnitudes de los mismos, pueden ser verificadas a partir del siguiente gráfico de contornos de igual desplazamientos resultantes:

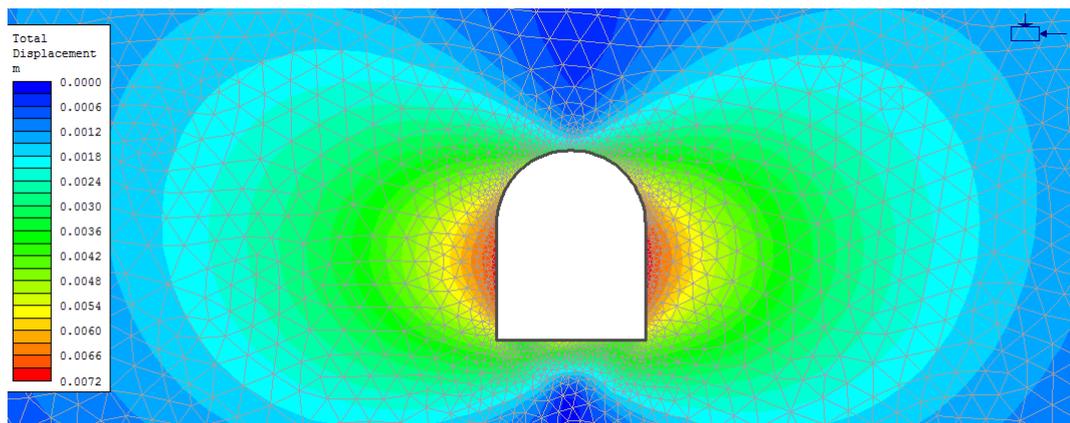


Figura 94. Contornos de desplazamiento del análisis elasto-plástico

Las figuras anteriores muestran una vez más, que las deformaciones tienden a cerrar la cavidad y que una de las principales variaciones respecto a los contornos de igual desplazamiento del análisis elástico, se presentan en las magnitudes acentuadas de los desplazamientos en la Solera. Por ello se presenta a continuación una tabla comparativa entre las magnitudes de desplazamiento resultante para ambos análisis.

**Tabla 25**

*Comparación de desplazamientos análisis elástico, análisis elasto-plástico*

Ubicación	Magnitudes de desplazamientos resultantes (m)	
	Análisis elástico	Análisis elasto-plástico
Clave	0,0011	0,0031
Hastiales	0,0056	0,0070
Solera	0,0016	0,0049
Zonas agudas	0,0021	0,0047

Esta última tabla muestra que las magnitudes de desplazamientos resultantes en la clave y solera para el análisis elasto-plástico, prácticamente se triplican respecto al análisis elástico. Por otra parte las magnitudes de desplazamientos resultantes en los hastiales presentan un pequeño incremento.

Las siguientes figuras muestran 1) a los elementos finitos que ingresaron en rango plástico y 2) a los contornos de igual porcentaje de plastificación.

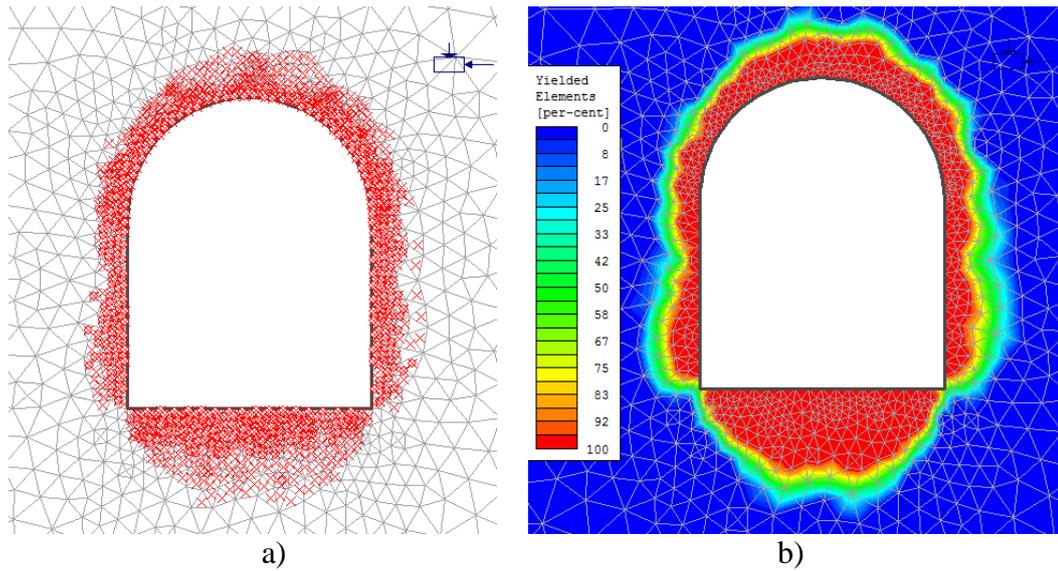


Figura 95. a) Elementos finitos en rango plástico b) Porcentajes de plastificación

Nótese que la zona plastificada, presentada en la anterior figura, se extiende más allá de la zona de sobretensión definida en el gráfico de contornos del factor de resistencia. Esto se debe a que la redistribución del esfuerzo, asociada con el fallo progresivo de la roca en la vecindad inmediata del túnel, da como resultado un crecimiento de la zona de sobretensión indicada por el análisis elástico. Esto último puede ser corroborado a partir de las siguientes figuras.

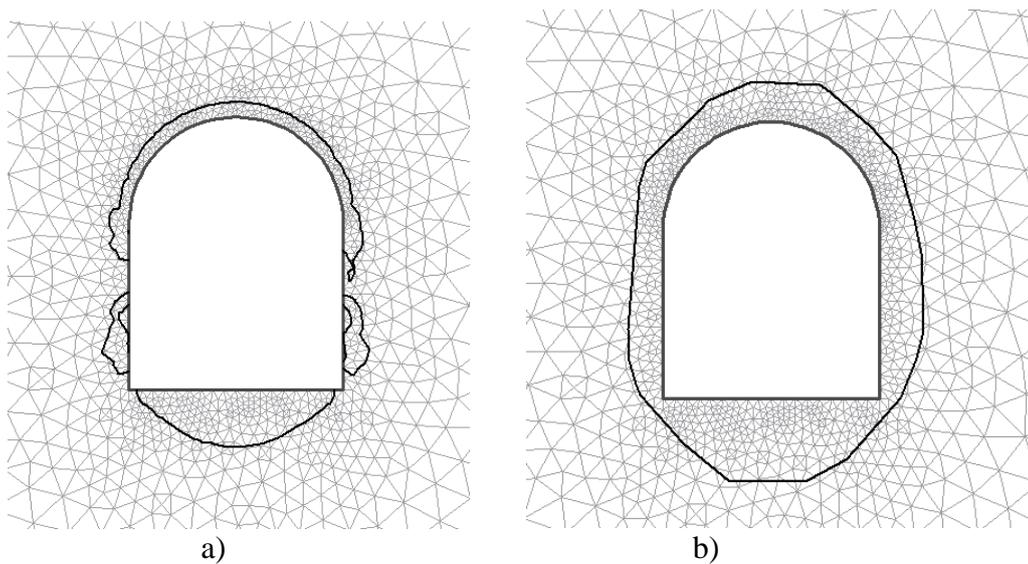


Figura 96. a) Contorno de sobre resistencia del análisis elástico b) contorno de plastificación

## CAPÍTULO V

### PRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

#### 5.1 Presentación de resultados

##### 5.1.1 Resultados de la formulación matricial

La formulación matricial de los elementos finitos de tres nodos, cuatro nodos, nueve nodos y cuatro nodos con modos incompatibles bidimensionales, fueron desarrollados en los apartados 4.1, 4.2, 4.3, 4.4, respectivamente.

Los resultados de cada formulación matricial para cada elemento, conducen a las siguientes etapas generales de formulación desarrollada:

- a. Elección de las funciones de desplazamiento a través de polinomios o expresiones serendipitas.

$$[U] = [N][d]$$

- b. Establecer la relación entre Deformaciones y Desplazamientos, a través de la teoría de la elasticidad.

$$[\varepsilon] = [\partial][U] = [\partial][N][d] = [B][d]$$

- c. Generar la matriz de rigidez, en base a una expresión deducida del principio de trabajos virtuales.

$$[K] = \int_V [B]^T [D] [B] dV$$

- d. Establecer la relación entre Esfuerzos y Deformaciones, a partir de la teoría de la elasticidad.

$$[\sigma] = [D][\varepsilon] = [D][B][d]$$

## 5.1.2 Resultados de la validez de los elementos usados en SAP2000 y Phase2

### 5.1.2.1 Resultados del elemento de tres nodos

El elemento de tres nodos está incluido en los programas SAP2000 y Phase2, y para evaluar la validez de este elemento en dichos programas, se desarrolló el análisis de una viga en voladizo realizada en el apartado 4.1.8, además de ello se desarrolló un cálculo manual a través de la formulación desarrollada en el apartado 4.1, y que es presentada en el apéndice A.

Los resultados de la evaluación de desplazamientos en el punto A y esfuerzos horizontales en el punto B mostrados en la Figura 12 se presentan en la siguiente tabla comparativa:

**Tabla 26**

*Comparación de resultados para el elemento de tres nodos*

Modelo	SAP2000	Phase2	Manual
Desplazamientos	-0,0016 m	-0,0016 m	-0,0016 m
Esfuerzo horizontal	7,476 N/m <sup>2</sup>	7,476 N/m <sup>2</sup>	7,476 N/m <sup>2</sup>

Podrá notarse que al menos hasta los cuatro decimales los tres resultados de desplazamientos verticales dan valores iguales. Por otra parte, los esfuerzos horizontales dan resultados iguales al menos hasta los tres decimales.

### 5.1.2.2 *Resultados del elemento de cuatro nodos*

El elemento de cuatro nodos está incluido en los programas SAP2000 y Phase2, y para evaluar la validez de este elemento en dichos programas, se desarrolló el análisis de una viga en voladizo realizada en el apartado 4.2.9, además de ello se desarrolló un cálculo manual a través de la formulación desarrollada en el apartado 4.1 , y que es presentada en el apéndice B.

Los resultados de la evaluación de desplazamientos en el punto A y esfuerzos horizontales en el punto B mostrados en la Figura 26 se presentan en la siguiente tabla comparativa:

**Tabla 27**

*Comparación de resultados para el elemento de cuatro nodos*

<b>Modelo</b>	<b>SAP2000</b>	<b>Phase2</b>	<b>Manual</b>
Desplazamientos	-0,0037 m	-0,0037 m	-0,0037 m
Esfuerzo horizontal	24,799 N/m <sup>2</sup>	0 N/m <sup>2</sup>	24,799 N/m <sup>2</sup>

Podrá notarse que al menos hasta los cuatro decimales los tres resultados de desplazamientos verticales dan valores iguales. Por otra parte, los resultados de esfuerzos horizontales, tanto en el cálculo manual como el ofrecido en el programa SAP2000, presentan valores iguales, esto en contraste al esfuerzo nulo que ofrece el programa Phase2.

### 5.1.2.3 *Resultados del elemento de cuatro nodos con modos incompatibles*

El elemento de cuatro nodos de modos incompatibles está incluido únicamente en el programa SAP2000, y para evaluar la validez de este elemento, se desarrolló el análisis de una viga en voladizo realizada en el apartado 4.4.8, además de ello se

desarrolló un cálculo manual a través de la formulación desarrollada en el apartado 4.4 , y que es presentada en el apéndice D.

Los resultados de la evaluación de desplazamientos en el punto A y esfuerzos horizontales en el punto B mostrados en la Figura 45, se presentan en la siguiente tabla comparativa:

**Tabla 28**

*Comparación de resultados para el elemento de modos incompatibles*

<b>Modelo</b>	<b>SAP2000</b>	<b>Manual</b>
Desplazamientos	-0,0121 m	-0,0121 m
Esfuerzo horizontal	75 N/m <sup>2</sup>	75 N/m <sup>2</sup>

Podrá notarse que al menos hasta los cuatro decimales los dos resultados de desplazamientos verticales dan valores iguales, y de la misma manera, los resultados para esfuerzos horizontales en SAP2000 como el los del cálculo manual ofrecen los mismos resultados.

### **5.1.3 Resultados del análisis tensional del macizo rocoso que rodea un túnel**

El análisis tensional fue presentado en el apartado 4.5.8, y los resultados pueden ser evaluados teniendo en cuenta algunos criterios utilizados dentro de la ingeniería de túneles. Dichos criterios no se encuentran normalizados, debido a la gran incertidumbre respecto del comportamiento de los macizos rocosos ante una excavación en el mismo. Estos criterios podrían ser los siguientes:

- a. Los desplazamientos deben tener magnitudes razonables, además de presentar distribuciones uniformes, conforme a la sección excavación.

- b. Los espesores de plastificación no deben ser superiores al radio del túnel, de lo contrario se conduciría a la degradación de la roca, acompañados de elevados desplazamientos convergentes.

Es claro que estos criterios representan una cantidad limitada, de la gran cantidad de criterios con los que los proyectistas de excavaciones, suelen juzgar los resultados de un análisis numérico, entorno a las predicciones que estos entregan.

#### ***5.1.3.1 Resultados de desplazamientos***

Las magnitudes de los desplazamientos en la roca que rodea el túnel, se muestran en la Figura 94. El desplazamiento máximo de la clave es de 3 mm, mientras que el de la solera es de unos 5 mm. Esta diferencia se debe a que se adoptó una clave arqueada que canaliza de manera eficiente la distribución de tensiones resultantes. Por otra parte el desplazamiento máximo en la cavidad, es de 7.1 mm en los hastiales, y podrá notarse que estos desplazamientos no alteraran en gran medida la sección de excavación.

Debe tenerse en cuenta que estas predicciones de desplazamientos, deben ser corroborados con una campaña de auscultación o medidas de convergencia al momento de realizar la excavación, solo así se tendrá la certeza de que las decisiones en cuanto al soporte propuesto, fueron adecuadas.

Puede realizarse también la evaluación acerca las fallas posibles en túneles, estas pueden ser fallas de tipo dúctil o frágil. La falla de tipo frágil es generalmente atribuida a las excavaciones en macizos rocosos masivos con índices de resistencia geológica “GSI” mayores a 75, mientras que la falla de tipo

dúctil es atribuida a los macizos rocosos débiles con índices de resistencia geológica “GSI” menores a 40.

El túnel 04 de análisis, presenta un índice de resistencia geológica “GSI” de 40 a 45, por ello se realizara la evaluación de falla dúctil, denominada también “Squeezing”.

#### ***a. Falla Dúctil - “Squeezing”***

La falla de tipo dúctil es reconocida como aquella de tipo progresivo, dependiente del tiempo, en la que la roca que rodea la excavación presenta grandes deformaciones, que deberían ser controladas con la instalación de algún soporte flexible, que evite daños potenciales de la roca que rodea la excavación.

Squeezing es el término usual para referirse a este tipo de falla, y que se ejemplifica mediante la siguiente figura:



*Figura 97. Fallo por squeezing en el túnel de Yacambú-Quivor (Venezuela)  
Fuente: Hoek & Marinos, 2009*

Para predecir este tipo de falla, existen diversos criterios empíricos, tal como el propuesto por Hoek y Marinos. Este criterio se basa en los análisis realizados y publicados por Hoek, en ellos se presenta, que la relación entre el resistencia a la compresión uniaxial del macizo rocoso y la tensión in situ vertical, podría ser utilizado como un indicador para predecir problemas potenciales de Squeezing.

El criterio de Hoek y Marinos es presentado a partir de un estudio de soluciones analíticas de forma cerrada para los desplazamientos de un túnel circular en un medio de tensión in situ constante y de igual magnitud para ambas direcciones, dichas soluciones fueron las propuestas por Duncan Fama (1993) y Carranza-Torres y Fairhurst (1999).

Más de 2000 iteraciones fueron llevadas a cabo para poder hallar las deformaciones de cada túnel, utilizándose los siguientes rangos de parámetros: Tensiones In situ 2 a 20 MPa (80 a 800 m de profundidad), Diámetro del túnel de 4 a 16 m, Resistencia a la compresión uniaxial de la roca intacta de 1 a 30 MPa, Constante “mi” de 5 a 12, Índice de Resistencia Geológica “GSI” de 10 a 35 y, para la solución Carranza-Torres, un ángulo de dilatación del criterio post rotura de Mohr de 0 a 10.

El siguiente grafico adimensional presenta los resultados del estudio, en función a la relación tensión vertical in situ y las deformaciones de cada túnel analizado. Esta figura demuestra que para los datos utilizados, todos los túneles tienen comportamientos que siguen un patrón claramente definido, y que puede predecirse ajustando a una curva con ecuación incluida en la figura.

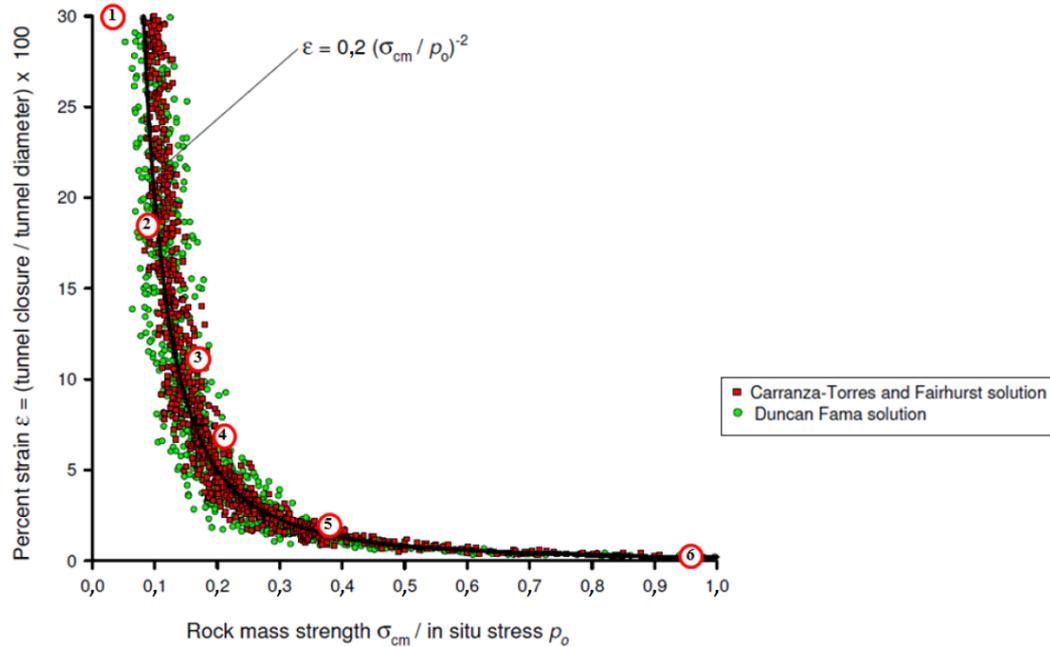


Figura 98. Trazado de convergencia de túneles sin soporte en función a la relación de resistencia del macizo rocoso a la tensión in situ

Fuente: Hoek & Marinos, 2009

Nota: **1.** Yacambú-Quivor tunnel, Venezuela – very low strength graphitic phyllite at depths of up to 1200m – extreme squeezing controlled by yielding. **2.** Nathpa-Jhakri tunnel, India – severe squeezing in a fault zone, controlled by yielding steel sets. **3.** Mucha tunnel, Taiwan – severe squeezing in a fault zone controlled by installation of long stressed anchors and rapid final concrete lining placement. **4.** Airberg tunnel, Austria – serious squeezing in mica schist controlled by steel ribs, shotcrete and rockbolts. **5.** Taurn tunnel, Austria – squeezing controlled by rockbolts and shotcrete. **6.** Mucha tunnel, Taiwan – normal tunneling in strong sedimentary rocks with rockbolts and shotcrete.

Nótese en el anterior gráfico, que se incluyen también las mediciones de deformación en algunos túneles del mundo, estas mediciones se acomodan conforme a la curva de predicción, confirmando que los estudios realizados representan una buena aproximación al comportamiento deformacional. Por otra parte, debe tenerse en cuenta que los estudios realizados por Hoek y Marinos, solo toman en cuenta casos de túneles circulares a tensión in situ constante y de igual magnitud para ambas direcciones, por lo que la ecuación de deformación adjunta en el grafico anterior no es representativa de la amplia gama de casos que podrían suscitarse en obras de excavación, pero que podría ser de gran ayuda para realizar

una primera estimación de predicción de Squeezing al momento de tomar decisiones en los inicios de un proyecto de excavación.

En el siguiente gráfico, Hoek y Marinos sugieren categorizar a las excavaciones sin soporte en función de las deformaciones, y podrá notarse que a cada categoría se le otorga una descripción acerca de los problemas de Squeezing que podrían presentarse en cada uno de ellos.

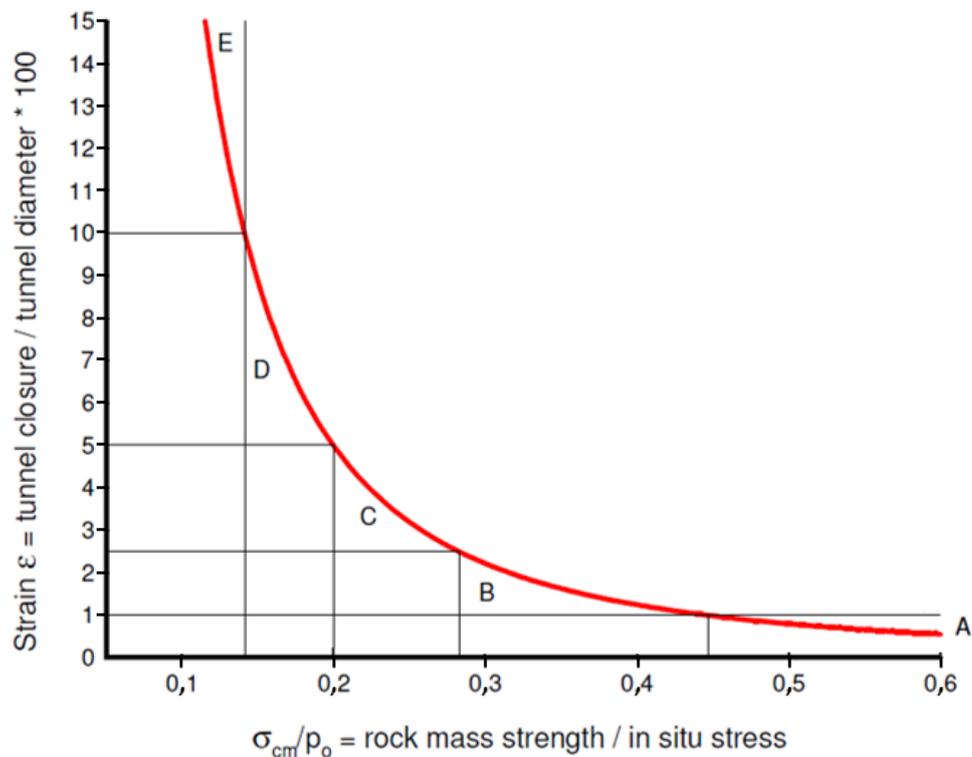


Figura 99. Relación aproximada entre la deformación y el grado de dificultad asociado a problemas de Squeezing en túneles sin soporte

Fuente: Hoek & Marinos, 2009

Nota: **A.** Strain less than 1%, few support problems **B.** Strain between 1 and 2.5%, minor squeezing problems **C.** Strain between 2.5 and 5%, severe squeezing problems **D.** Strain between 5 and 10%, very severe squeezing problems **E.** Strain greater than 10%, extreme squeezing problems

La siguiente tabla de Hoek y Marinos, muestra las categorías de excavación, acompañadas de algunas recomendaciones en torno a las decisiones que pueden tomarse para obtener algunas soluciones a los problemas de Squeezing.

**Tabla 29***Relación aproximada entre deformaciones y grado de squeezing.*

	<b>Deformacion <math>\varepsilon</math> %</b>	<b>Cuestiones geotécnicas</b>
A	<b>Menor a 1</b> (Sin problemas de Squeezing)	Pueden presentarse pocos problemas de estabilidad y pueden usarse métodos de diseño de soporte muy sencillos. Las recomendaciones de soporte basadas en clasificaciones de macizos rocosos, proporcionan una base adecuada para el diseño.
B	<b>1 a 2,5</b> (Problemas menores de Squeezing)	Los métodos de convergencia confinamiento se usan para predecir la formación de una zona 'plástica' en el macizo rocoso que rodea un túnel y de la interacción entre el desarrollo progresivo de esta zona y los diferentes tipos de soporte.
C	<b>2,5 a 5</b> (Problemas severos de Squeezing)	los análisis por elementos finitos bidimensionales, que incorpora elementos de soporte y secuencia de excavación, se usan normalmente para este tipo de problema. La estabilidad del frente no es generalmente un problema importante.
D	<b>5 a 10</b> (Problemas muy severos de Squeezing)	El diseño del túnel está dominado por problemas de estabilidad en el frente y, aunque generalmente se realizan análisis bidimensionales por elementos finitos, se requieren algunas estimaciones de los efectos del reforzamiento por delante del frente de excavación y del reforzamiento del frente de excavación.
E	<b>Mayor a 10</b> (Problemas extremos de Squeezing)	La inestabilidad severa de la cara así como los problemas de squeezing del túnel hacen esto un problema tridimensional extremadamente difícil para el cual no hay métodos actuales y eficaces del diseño. La mayoría de las soluciones se basan en la experiencia.

Fuente: Hoek, 2014

El túnel 04, presenta desplazamientos máximos en los hastiales, con magnitudes de 7,1mm, hallados a través del análisis Elasto-plástico, por otra parte la mitad del claro del túnel es de 1,75m, y la deformación del túnel puede ser calculada como:

$$\varepsilon(\%) = \frac{0,0071}{1,75}(100) = 0,41$$

La deformación encontrada de 0,41% categoriza a la excavación como de tipo A, con lo cual se predice que la excavación no contara con problemas de “Squeezing”.

Teniendo en cuenta que no se contara con desplazamientos considerables y que la excavación no tendrá problemas de Squeezing, es posible que el diseño

de los elementos de soporte y fortificación, quede controlado por un análisis de los mecanismos de debilitamiento producido por las discontinuidades y que no forma parte de esta investigación.

### 5.1.3.2 Resultados de tensiones.

El análisis elástico realizado en el apartado 4.5.8.2, demostró que la zona circundante a la excavación superaba la resistencia pico del material, por lo cual fue realizado un análisis elasto-plástico, que tomara en cuenta el comportamiento post pico del material. Este último análisis dio como resultado los espesores de roca plastificada, es decir, espesores de roca que habían ingresado en un campo en el que las tensiones habían descendido hasta llegar a un punto en que se mantenían constantes con deformaciones que seguían aumentando.

La siguiente figura presenta que el espesor plastificado en la clave y los hastiales es de 0,66m y 0,71m, respectivamente. Estas zonas de falla no son tan extensas y son inferiores al radio del arco de la clave, por lo que se espera que no haya desbaste, fragmentado y desprendimiento de rocas sueltas provenientes de la clave y las paredes del túnel 04.

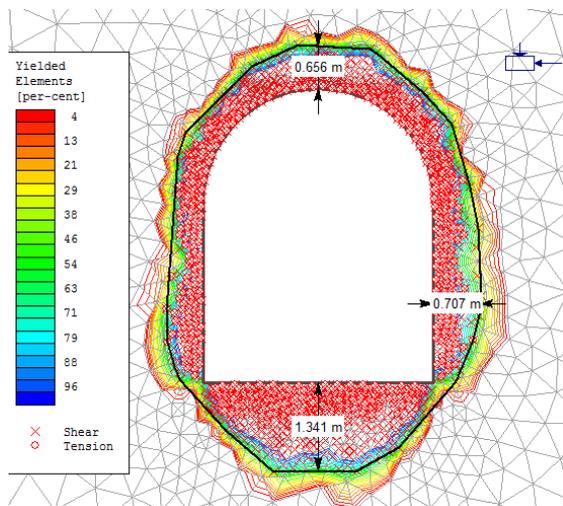


Figura 100. Espesores de plastificación alrededor de la excavación del túnel 04

Nótese en el anterior gráfico, que el espesor de plastificación en la base del túnel es 1,34 m, lo cual no representa un problema debido a que esta se encuentra acompañada de deformaciones bastante despreciables, y que además no es un mecanismo de peligro tal como lo que podrían representar los desprendimientos en la clave y hastiales.

## **5.2 Contrastación de hipótesis**

El CAPÍTULO IV de esta investigación permitió conocer al método de elementos finitos, a través de las formulaciones de los elementos de tres a nueve nodos que se desarrollaron y que se emplearon para resolver vigas en voladizo de forma manual y computacional, presentadas en los apendices A, B, D y en los apartados 4.1.8, 4.2.9 y 4.4.8, respectivamente, dando resultados iguales para ambos tipos de cálculo, permitiendo de esta manera, utilizar el programa Phase2 para realizar la evaluación tensional del macizo rocoso que circunda al túnel 04 del proyecto Arma, desarrollada en el apartado 4.5.8.

## **5.3 Discusión de resultados**

### **5.3.1 Discusión acerca de los resultados de la formulación matricial**

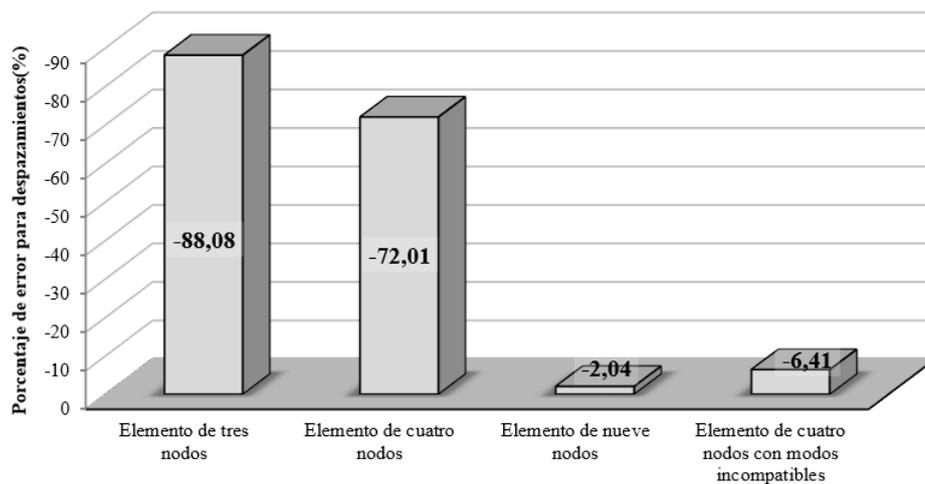
La formulación matricial que se realizó, para el elemento de tres nodos, es conocida como “Formulación Directa” debido a que presenta los conceptos básicos, necesarios para generar un elemento finito por primera vez, evitando de esta manera, introducir conceptos complicados que oscurezcan la esencia del método.

Al igual que los elementos de cuatro y nueve nodos, es posible realizar también la “formulación paramétrica” del elemento de tres nodos, pero se intentó

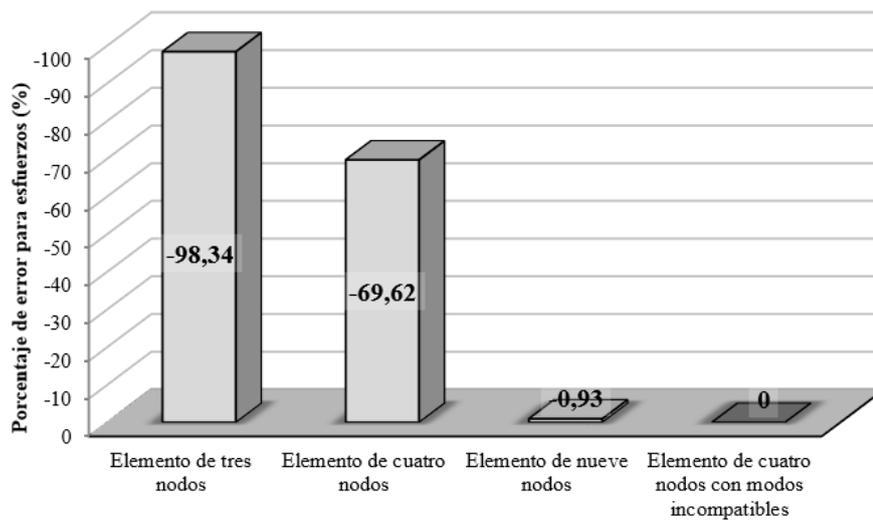
en todo momento realizar los procedimientos más simples, que den lugar a la rápida comprensión del método.

La formulación isoperimétrica realizada para los elementos de cuatro nodos, nueve nodos y cuatro nodos con modos incompatibles, es esencial para que dichos elementos puedan ser utilizados en problemas que implicarían usar geometrías arbitrarias de los mismos. De haberse realizado la formulación directa de cada uno de ellos, la geometría estaría limitada a geometrías regulares, tales como cuadrados o rectángulos, con expresiones matriciales de rigidez, prácticamente inabordables.

La formulación matricial de cada elemento estuvo acompañada de un ejemplo de solución de una viga en voladizo sujeta a cargas de corte, la cual fue comprada por una solución exacta proporcionada por la Teoría de vigas. En las siguientes figuras se presenta un diagrama de barras en las que se colocó los porcentajes de error para la solución de desplazamientos y esfuerzos de cada elemento formulado.



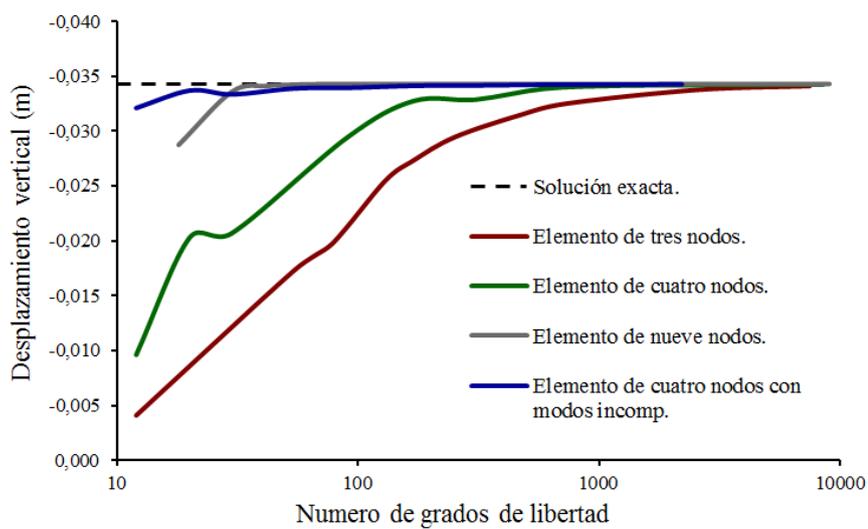
a)



b)

Figura 101. Comparación porcentual de error para a) desplazamientos b) esfuerzos

En los anteriores gráficos, puede observarse que el elemento de tres nodos y cuatro nodos, son los que poseen menor precisión a la hora de analizar estructuras con predominancia a flexión, no obstante, podría mejorarse los resultados refinando el mallado. Para verificar esto, se preparó la Figura 102, en la que se demuestra el comportamiento de cada elemento, conforme al incremento de grados de libertad, además de mostrarse la comparación entre comportamientos.



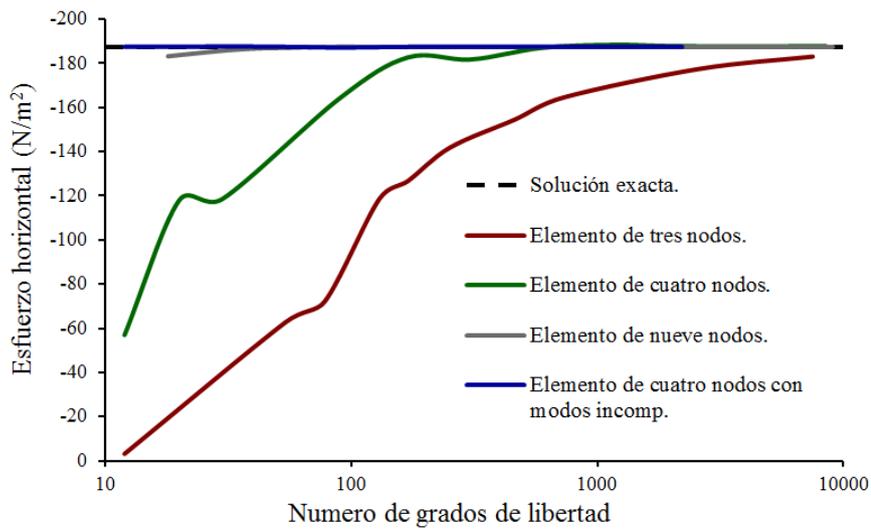


Figura 102. Comparación de comportamientos conforme al incremento de GDL

Puede notarse que en estas últimas figuras el elemento de modos incompatibles es el más adecuado para solucionar un problema de flexión, debido a que basta con una poca cantidad de elementos (poca cantidad de grados de libertad)) para aproximarse cercanamente a los resultados exactos. Podrá notarse también que el elemento de cuatro nodos con modos incompatibles, supera la alta capacidad del elemento de nueve nodos, lo cual demuestra que este último elemento es buen referente en cuanto a comportamiento. Por otra parte, el elemento de tres y cuatro nodos converge de manera lenta a la solución exacta, lo cual implica que los análisis a ser realizados con este elemento, deberían poseer una elevada cantidad de grados de libertad.

Por último, las etapas generales del método, no deben ser consideradas como una secuencia única y suficiente para la formulación de cualquier elemento finito, de lo contrario, se estaría limitando la posibilidad de generar elementos sofisticados para el cálculo de estructuras.

### **5.3.2 Discusión de resultados de la validez de elementos en SAP2000 y Phase 2**

El elemento de tres nodos es válido en los programas SAP2000 y Phase2, debido a que ambos programas entregan soluciones de desplazamientos y esfuerzos, evaluados en una viga en voladizo sujeta a cargas de corte. Por otra, parte el cálculo manual entrego, de la misma manera, resultados iguales a los computacionales, demostrándose con ello que la formulación realizada fue la correcta.

El elemento de cuatro nodos es válido en el programa SAP2000, debido a que los resultados de desplazamientos y esfuerzos que este último entrega, son iguales a los que se calcularon de forma manual. Por otra parte, los resultados de desplazamientos del programa Phase2 son los únicos que podrían ser válidos, ya que los esfuerzos no reflejan buenos resultados, al menos para una malla de elementos finitos tan regular como la que fue utilizada. Cabe resaltar que si se utilizase una malla irregular de elementos de cuatro nodos, los resultados podrían ser mejores que los de una malla regular.

El elemento de cuatro nodos con modos incompatibles está presente únicamente en el programa SAP2000, y los resultados de desplazamientos que este último entrega, son exactamente iguales a los que fueron calculados de forma manual, demostrándose de esta manera que la formulación fue la correcta. Debe tenerse en cuenta que una malla regular de este elemento, ofrece resultados mucho mejores que los que se podrían obtener de una malla irregular, por ello, es recomendable generar mallas que se aproximen a formas regulares de dicho elemento.

### **5.3.3 Discusión de resultados acerca del análisis tensional del túnel 04**

En apartados anteriores, se pudo conocer la baja precisión que posee el elemento finito de tres nodos, ante problemas en los que predominan estados de flexión, y que además, podría ser suficiente un mallado riguroso para superar estas dificultades. Debe tenerse en cuenta también, que la mayoría de túneles adoptan claves en forma de arco, con el fin de lograr distribuciones tensionales compresivas alrededor de la cavidad, por ello, no necesariamente un túnel podría estar sujeto a estados predominantes de flexión, lo cual daría lugar a utilizar el elemento de tres nodos para realizar la evaluación tensional del túnel 04.

Con el fin de validar, los resultados que ofrece una malla de elementos finitos de tres nodos para la evaluación del túnel 04, se realizó un ejemplo de convergencia desarrollado en el apartado 4.5.8.1, en el cual se comparó los resultados del túnel 04 sometido únicamente a esfuerzos verticales ante una malla de elementos de cuatro nodos con modos incompatibles, desarrollada en el programa SAP2000 y una malla de elementos de tres nodos, desarrollada en el programa Phase2. Ambas mallas ofrecieron resultados muy similares, tanto a nivel de desplazamientos como de esfuerzos, con lo cual, se prosiguió utilizando la malla de elementos de tres nodos para realizar en análisis completo del túnel 04.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 6.1 Conclusiones

**Primera.** Se logró realizar la formulación matricial del elemento finito de tres nodos y cuatro nodos, lo cual sirvió para demostrar, la baja precisión que ambos elementos poseen a la hora de dar solución a problemas con predominancia en flexión. Para superar estos inconvenientes, es preciso realizar mallados rigurosos.

**Segunda.** Las soluciones para desplazamientos y esfuerzos obtenidas de los programas SAP2000 y Phase 2, fueron las mismas soluciones que se obtuvieron al realizar un cálculo independiente, a través de analizar una viga en voladizo sujeta a cargas de corte, utilizando en todos los casos, un elemento finito de tres nodos de geometría regular.

**Tercera.** Las soluciones para desplazamientos obtenidas de los programas SAP2000 y Phase2, fueron las mismas soluciones que se obtuvieron al realizar un cálculo independiente, a través de analizar una viga en voladizo sujeta a cargas de corte, utilizando en todos los casos, un elemento finito de cuatro nodos de geometría regular. Esto no fue

reflejado al verificar los esfuerzos en el programa Phase2, ya que solo las soluciones de esfuerzos del cálculo independiente eran iguales a las obtenidas por el programa SAP2000.

**Cuarta.** Se logró realizar la formulación matricial del elemento finito de nueve nodos, el cual sirvió como referente del adecuado comportamiento que deberían poseer las distintas formulaciones. No obstante, dicho elemento requirió de un arduo procesamiento numérico al realizar un cálculo independiente a través de analizar una viga sujeta a cargas de corte, lo cual es desfavorable para utilizarlo de forma rutinaria.

**Quinta.** Se logró realizar la formulación matricial de elemento finito de cuatro nodos con modos incompatibles, el cual es un elemento altamente eficiente en cuanto a problemas de flexión se trata. Este elemento requirió de algunos procedimientos adicionales a los que se necesitaron para formular los demás elementos.

**Sexta.** Las soluciones para desplazamientos y esfuerzos obtenidas del programa SAP2000, fueron las mismas soluciones que se obtuvieron al realizar un cálculo independiente, a través de analizar una viga en voladizo sujeta a cargas de corte, utilizando en ambos casos, un elemento finito de cuatro nodos con modos incompatibles de geometría regular.

**Séptima.** El elemento finito de cuatro nodos con modos incompatibles, es el elemento que posee mayor precisión a la hora de evaluar problemas

con predominancia en flexión. Este elemento posee elevada rapidez de convergencia y es encontrado únicamente en el programa SAP2000.

**Octava.** No se utilizó el elemento finito de cuatro nodos con modos incompatibles del programa SAP2000, debido a que dicho programa no posee las herramientas necesarias para realizar la evaluación tensional de excavaciones.

**Novena.** El programa Phase2, es un programa dirigido al cálculo de excavaciones, por ello, dicho programa fue utilizado para realizar la evaluación tensional y deformacional del túnel 04 del proyecto Arma, además de dar a conocer los requisitos a nivel básico, que se necesitarían para generar parámetros de entrada, que sirvan para efectuar el análisis computacional de excavaciones.

**Décima.** Para realizar la evaluación tensional del túnel 04, se utilizó un mallado bastante refinado del elemento finito de tres nodos, ya que el elemento de finito de cuatro nodos, de mejor precisión, no reflejaba resultados adecuados respecto a los esfuerzos inducidos examinados en la viga en voladizo.

**Onceava.** La evaluación tensional del túnel 04 fue llevada en dos etapas, la primera realizando un análisis elástico y la segunda realizando un análisis elasto-plástico. La primera etapa, demostró que el estado tensional inducido, daba como resultado, el sobrepasar la resistencia

pico del macizo rocoso, lo cual condujo a una incursión en etapa plástica, de los espesores circundantes a la excavación.

**Doceava.** El análisis de tensional del túnel 04, utilizando el método de elementos finitos a través de un comportamiento elasto-plástico del macizo rocoso, reveló que los espesores de roca plastificada, no eran superiores al radio de la clave del túnel, por lo que se espera que no haya desgaste y fragmentado de la roca circundante a la excavación. Por otra parte, las deformaciones halladas no superan el 1%, lo cual genera como predicción, la ausencia de problemas de Squeezing.

## 6.2 Recomendaciones

**Primera.** Se recomienda utilizar el elemento de cuatro nodos con modos incompatibles, para aquellos casos en los que el comportamiento, pueda ser considerado como predominante en flexión.

**Segunda.** Se recomienda utilizar el elemento finito de tres nodos, para el cálculo de excavaciones, siempre y cuando la malla de elementos finitos utilizada sea suficientemente fina.

**Tercera.** El elemento finito de cuatro nodos, que posee el programa Phase 2, debe ser utilizado con mucha precaución, debido a que no entrega estados tensionales adecuados, al menos cuando la geometría de cada elemento finito perteneciente a la malla, sea regular.

**Cuarta.** Es recomendable que los que hagan uso del método de elementos finitos, verifiquen los distintos elementos que utilizan a partir de un programa comercial, a través de problemas de los que se conozca las soluciones a nivel de desplazamientos como de tensiones.

**Quinta.** Debe tenerse en cuenta que el método de elementos finitos realizado tiene como hipótesis, el hecho de considerar desplazamientos pequeños y que siempre y cuando no se relegue dicha hipótesis, en ningún caso se podrá hallar desplazamientos que sean capaces de dar a conocer el colapso de una excavación, por ello, los análisis en cuanto a excavaciones deben ser meramente orientativos, con fines de tomar decisiones prácticas y que aclararen situaciones de incertidumbre.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Hoek, E. (2014). *Practical Rock Engineering*. Vancouver.
- Hoek, E., & Brown, E. T. (1980). *Underground Excavations in Rock*. London: Instn Min. Metall.
- Hoek, E., & Marinos, P. (2009). Tunnelling in overstressed rock. *EUROCK2009*, (pág. 13). Dubrovnik.
- Oñate, E. (1991). *Calculo de Estructuras por El Metodo de Elementos Finitos*. Barcelona.
- Ottazzi, G. (2010). *Apuntes del curso Análisis estructural I*. Lima: PUCP.
- Singh, B., & Goel, R. K. (2011). *Engineering Rock Mass Classification*. Oxford: Elsevier .
- Timoshenko, S. (1957). *Resistencia de Materiales*. Madrid.
- Timoshenko, S., & Goodier, J. (1972). *Teoria de la Elasticidad*. Bilbao: Urmo.
- Vásquez , M., & López, E. (2001). *El método de los elementos finitos aplicado al análisis estructural*. Madrid: Noela.
- Wilson, E. L. (2008). *Analisis Estatico y Dinamico de Estructuras*. Berkeley.
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (1994). *El Metodo de los Elementos Finitos*. España.